# الأساليب الإحصائية

الدكتور شفيق العتوم
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
الجامعة الأردنية

الدكتور فتحي العاروري
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
الجامعة الأردنية

الجزء الثاني



# الأساليب الإحصائية

## الجزء الثاني

بسم الله الرحمن الرحيم

# الإهداء

إلى كل المهتمين باستخدام الإحصاء في المجالات المختلفة

المؤلفان

رقم الاجازة المتسلسل لدى دائرة المطبوعات والنشر ٥٥٤/ ٧/ ٩٥
رقم الايداع لدى دائرة المكتبات والوثائق الوطنية ٧٥٠/ ٧/ ٩٥

# الأساليب الإحصائية

## الجزء الثاني


الدكتور فتحي العاروري
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
الجامعة الأردنية

الدكتور شفيق العتوم
كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية
الجامعة الأردنية



الطبعة الأولى
١٩٩٥




الطبعة الأولى

١٩٩٥



دار المناهج للنشر والتوزيع

اول طلوع جبل الحسين - سرفيس خط ٩
هاتف ٦١٦٦٠٧ - فاكس ٦١٦٦٠٧
ص.ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الأردن

# المقدمة

لقد شهد علم الاحصاء تطوراً واسعاً في النصف الثاني من هذا القرن وأصبح يستخدم في جميع العلوم النظرية والتطبيقية، وكان من جملة هذه العلوم التي دخل الإحصاء في خدمتها بصورة واسعة علمي الاقتصاد والادارة. ولقد تُرجم هذا الاهتمام المتزايد بعلم الاحصاء بوفرة في الكتب والمقالات بمختلف اللغات الحية تشرح وتبسّط استخدام الإحصاء في هذه العلوم.

إن كل هذا الزخم من الكتابة في علم الإحصاء لم تنل منه اللغة العربية إلا نزراً يسيراً، لذلك فإن المؤلفين قد جهدا لتقديم هذا العمل المتواضع علّه يسهم في سد بعض النقص الشديد الذي تعانيه المكتبة العربية في هذا المجال.

ولقد حاول المؤلفان تبسيط الأفكار والنظريات الاحصائية الواردة في هذا الكتاب وجعلها في متناول الطلاب والباحثين في جميع العلوم الانسانية وخاصة في مجالات الاقتصاد والادارة وذلك بتقديم العديد من الأمثلة والتمارين المحلولة وإضافة الوفير من الأسئلة والتمارين غير المحلولة في آخر كل باب من الأبواب الثمانية.

والله ولي التوفيق

المؤلفان



# الباب الأول

## بعض الادوات الرياضية

يشتمل هذا الباب على مقدمة تتعلق بدراسة بعض الأدوات الرياضيـة التي تهم الإحصائيين والإقتصاديين والإداريـين والتي تعتبر أسـاسية لاستيعـاب وفهم الكثير من القضايا الإحصائية المـطروحة في الأبـواب اللاحقـة في هذا الكتـاب. وسوف نعـرض بشكل مختصر المواضيع والنظريات التالية:

نـظريـة الفئــات Set Theory، التبــاديــل والتــوافيق Combinations and Permutations مفكوك ذات الحدين Binomial Theory المحـددات والمصفوفـات De-terminants and Matrices هذا ويستطيع من تتوافر لديه الخلفية الـرياضيـة اللازمـة تجاوز هذا الباب إلى الأبواب التالية مباشرة.



# الفصل الأول

## نظرية الفئات

تلعب نظرية الفئات دوراً أساسياً في الرياضيات الحديثة ويزداد استخدامها في مجالي الاحصاء والاقتصاد، وفي هذا الفصل سوف نعرض بعض الخصائص الأولية لهذه النظرية.

**(١ـ ١ ـ ١) تعريف:**

يمكن تعريف الفئة على أنها مجموعة من العناصر (أرقام، أحرف، كتب، طلاب. . . الخ) المحددة والمعرفة تعريفاً واضحاً.

من هذا التعريف يتضح أن مجموعة من ثلاثة كتب، مجموعة من الطلاب في مدرسة معينة، مجموعة من ٥٢ من أوراق اللعب هي مجرد أمثلة على الفئات.

إذا رمزنا للفئة بالرمز أ وعناصرها بالرمز $أ_ر$، ر = ١ ، ٢ ، . . . . . . فإنه يمكن التعبير عن انتماء العنصر $أ_ر$ للفئة أ على النحو التالي:

$أ_ر \in أ$

أما إذا لم يكن $أ_ر$ عنصراً من عناصر الفئة فإنه يمكن أن يُعبّر عن عدم انتمائه إلى الفئة كما يلي:

$أ_ر \notin أ$

**مثـــال:**

إذا كانت الفئة أ مكونة من الأرقام التالية: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فإن كل رقم من هذه الأرقام يعتبر عنصراً من عناصر الفئة أ، ويُعبّر عن هذه الفئة بوضع عناصرها داخل أقواس على النحو التالي:

$أ = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

وبناء على ما سبق فإن

٣ ∈ أ، ٥ ∈ أ، ٩ ∉ أ

هذا ويمكن أن تتكون الفئة من عنصر واحد (الرقم ٧ مثلاً) كما يلي:

ب = {٧}

**(٢ ـ ١ ـ ١) تعريف:**

إذا لم تحتوي الفئة على أي عنصر من العناصر فإنها تسمى بالفئة الفارغة ونرمز لها بالرمز Φ ومثال على ذلك فئة الأشخاص الذين يعيشون إلى الأبد.

هذا ويجب التفريق بين الفئة الفارغة Φ والفئة الصفرية {صفر} التي تحتوي على عنصر واحد هو الصفر.

**(٣ ـ ١ ـ ١) تعريف:**

إذا كانت لدينا الفئتان أ، ب فإننا نقول بأن الفئة أ تساوي الفئة ب فقط إذا كان كل عنصر من عناصر الفئة أ موجوداً في الفئة ب وفي نفس الوقت كل عنصر من عناصر الفئة ب موجوداً في الفئة أ، بمعنى أن تحتوي كل فئة من هذه الفئات تماماً على كل عنصر تحتويه الفئة الأخرى ويعبر عن هذه العلاقة على النحو التالي:

أ = ب

وإذا كانت الفئتان غير متساويتين فإننا نعبّر عن عدم المساواة على النحو التالي:

أ ≠ ب

مع العلم بأن الإشارات (=، ≠) لا تتضمن المعنى الجبري المعتاد للتساوي وعدمه.

**(٤ ـ ١ ـ ١) تعريف:**

إذا كانت لدينا الفئتان أ، ب بحيث أن كل عنصر من عناصر الفئة أ عنصر في الفئة ب فإننا نقول بأن الفئة أ فئة جزئية من الفئة ب ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

أ ⊃ ب

أي أن الفئة أ محتواة في الفئة ب

أو ب ⊂ أ

أي أن الفئة ب تحتوي على الفئة أ.

وباستخدام فكرة الاحتواء في نظرية الفئات فإننا نستطيع إعادة تعريف تساوي الفئتين أ، ب كما يلي:

تعتبر الفئتان أ، ب متساويتين (أ = ب) فقط إذا كان لدينا أ ⊆ ب وفي نفس الوقت ب ⊆ أ

مثـــال:

إذا كانت لدينا الفئات التالية:

أ = {١، ٢، ٣}

ب {١، ٢، ٣}

جـ {١، ٢، ٣، ٤}

فإن أ ⊂ جـ ، ب ⊂ جـ

أ = ب ، أ ≠ جـ

وبصورة عامة فإن الفئة الفارغة ϕ تعتبر فئة جزئية من أية فئة مثل أ (ϕ ⊂ أ)

(٥ ـ ١ ـ ١) تعريف خصائص الاحتواء:

إذا كانت لدينا الفئات أ، ب، جـ فإن كل فئة من هذه الفئات هي جزئية من نفسها أي أن: أ ⊆ أ، ب ⊆ ب، جـ ⊆ جـ

وهذا يعني أن خاصية الاحتواء في الفئات انعكاسية Reflexive أما إذا كان أ ⊂ ب، فإننا لا نستطيع أن نحكم من ذلك بأن ب ⊂ أ أي أن خاصية الاحتواء في الفئات ليست تبادلية Anti-symmetric

وإذا كانت ب ⊂ أ، جـ ⊂ ب

فإن جـ ⊂ أ

أي أن خاصية الاحتواء في نظرية الفئات متعدية Transitive

(٦ ـ ١ ـ ١) تعريف الفئة الشاملة: **Exhaustive Set**

تعرف الفئة الشاملة (أو فراغ المعاينة) لغرض معيّن على أنها الفئة التي تشتمل على جميع العناصر الداخلة في إطار المناقشة أو الدراسة ويرمز لها بالرمز ف. فإذا أردنا أن نقوم بدراسة عن طلبة الجامعة الأردنية مثلاً فإن الفئة الشاملة في هذه الحالة تشتمل على جميل طلبة الجامعة.

هذا وقد لا يكون فراغ المعاينة معرفاً تعريفاً تاماً ولكنه يمكن أن يفهم عموماً من سياق المناقشة، وتعتبر جميع الفئات في الموضوع مدار البحث فئات جزئية من فراغ المعاينة Sampling Space

**مثـــال:**

إذا كانت الفئة الشاملة ف تمثل جميع الأعداد الصحيحة الموجبة وكانت الفئة أ تمثل الأعداد الفردية الموجبة والفئة ب تمثل الأعداد الزوجية الموجبة فإن الفئتين أ، ب تعتبر كل منهما فئة جزئية من الفئة الشاملة ف، أي أن

أ ⊂ ف

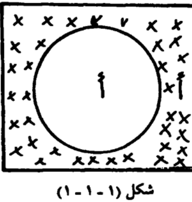
ب ⊂ ف

**(٧ ـ ١ ـ ١) تعريف الفئة المكمّلة : Complementary Set**

إذا كانت أ فئة جزئية من الفئة الشاملة ف فإننا نعرف مكمّل الفئة أ بالنسبة للفئة ف على أنه فئة تحتوي على كل العناصر الموجودة في الفئة الشاملة ف وغير الموجودة في الفئة أ، ويعبّر عن ذلك كما يلي:

$\overline{أ}$ = ف – أ

ويمكن توضيح ذلك باستخدام طريقة فن كما هو مبين في الشكل (١ ـ ١ ـ ١)




شكل (١ ـ ١ ـ ١)

**(٨ ـ ١ ـ ١) عمليات الفئات**

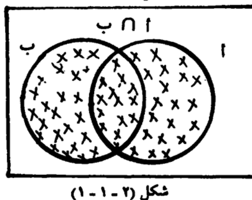
الاتحاد أو الجمع : **Union (or Sum)**

يعرف الاتحاد بين فئتين أ، ب على أنه فئة تحتوي على كل العناصر التي تنتمي إلى الفئة أ أو الفئة ب أو كليهما معاً ويعبر عن هذا الاتحاد كما يلي:

أ ∪ ب

ويمكن توضيح هذا الاتحاد كما هو مبين في الشكل (٢ ـ ١ ـ ١)

وبشكل عام إذا كانت لدينا الفئات أر، ر = ١، ٢ . . . . . ، ن




شكل (٢ ـ ١ ـ ١)

فـإن اتحـاد هـذه الفئات يعبر عنه كما يلي

$أ_١ \cup أ_٢ \cup \ldots\ldots \cup أ_ن = \bigcup_{ر=١}^{ن} أ_ر$

ويمكن استخدام أشكال فن لتوضيح هذه العلاقة مع ملاحظة أن هذه الأشكال تصبح أكثر تعقيداً كلما زاد عدد الفئات.

مثـــال:

إذا كانت الفئة أ = {١، ٢، ٣، ٤}

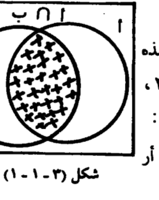
والفئـــة ب = {١، ٢، ٥، ٧}

فإن أ $\cup$ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧}

**التقاطع أو الضرب: Intersection (or product)**

يعرّف تقاطـع الفئة أ مـع الفئة ب عـلى أنه فئـة تحتوي عـلى كل العنـاصر التي تنتمي إلى كل من الفئتين أ، ب معاً، ويعبر عن هذه العلاقة كما يلي:

أ $\cap$ ب



شكل (٣ ـ ١ ـ ١)

وشكل فن (٣ ـ ١ ـ ١) يوضح التقاطـع في هذه الحالة، وإذا كـانت لدينـا الفئات $أ_ر$، ر = ١، ٢، ٢، ...... ، ن فإن تقاطع هذه الفئات يعبر عنه كما يلي:

$أ_١ \cap أ_٢ \cap أ_٣ \cap \ldots\ldots \cap أ_ن = \bigcap_{ر=١}^{ن} أ_ر$

مثـــال:

إذا كانـــت الفئة أ = {٣، ٤، ٥، ٦، ٧}

والفئـــة ب = {٢، ٣، ٤}

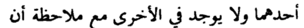
فإن أ $\cap$ ب {٣، ٤}

وإذا كان تقاطع الفئتين أ، ب فئة فارغة (أي أن الفئتين لا تحتويان على عناصر مشتركة) أي أن أ $\cap$ ب = $\phi$

فإننا نقول بأن الفئتين أ، ب غير متقاطعتين (منفصلتين).

**طرح الفئـــات: Subtraction of Sets**

يعرف الفرق بـين الفئتين أ، ب عـلى أنه فئـة تحتوي عـلى كل عنصر يـوجد في

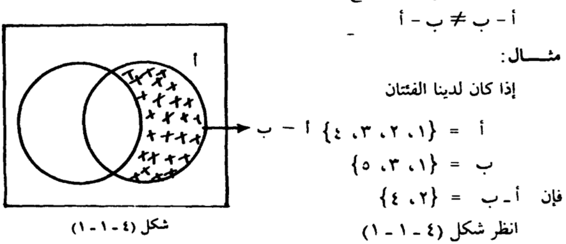


أحدهما ولا يوجد في الأخرى مع ملاحظة أن

أ - ب ≠ ب - أ

**مثـــال:**

إذا كان لدينا الفئتان




أ = {١، ٢، ٣، ٤}

ب = {١، ٣، ٥}

فإن أ ـ ب = {٢، ٤}

انظر شكل (٤ ـ ١ ـ ١)

شكل (٤ ـ ١ ـ ١)

وإذا كانت الفئة أ هي الفئة الشاملة (فراغ المعاينة) فإن الفرق بين أ، ب يسمى مكمّل الفئة أ بالنسبة لفراغ المعاينة ب

أ ـ ب = $\overline{\text{ب}}$

**مثـــال:**

شكل (٥ ـ ١ ـ ١)

١، ٣، أ١

إذا كانت الفئة أ = {١، ٢، ٣، أ١، أ٢، ٦} هي الفئة الشاملة والفئة ب = {١، ٣، أ٢} فئة جزئية منها فإن مكمّل ب بالنسبة للفئة الشاملة أ هو

$\overline{\text{ب}}$ = أ - ب = {٢، أ١، ٦}

وموضح بالشكل (٥ ـ ١ ـ ١)

### (٩ ـ ١ ـ ١) الفئات المحدودة وغير المحدودة Finite and Infinite sets

تعرّف الفئة المحدودة على أنها الفئة التي يمكن مقابلة كل عنصر من عناصرها برقم من الأرقام الطبيعية مثل عدد الطلاب في أحد الصفوف، عدد المقاعد في مكان محدّد، عدد الكتب في احدى المكتبات. أما الفئة غير المحدودة فهي التي لا نستطيع أن نحصر عناصرها ولكننا نستطيع مطابقة كل عنصر من عناصرها واحداً بواحد مع فئة غير محدودة من الأرقام مثل عدد النجوم.

### (١٠ ـ ١ ـ ١) الفئات المعدودة وغير المعدودة

### Countable and Uncountable Sets

تعرّف الفئة المعدودة على أنها الفئة التي يمكن مطابقة عناصرها مع عناصر فئة

من الأرقام الطبيعية، في حين تعرّف الفئة التي لا يمكن مطابقة عناصرهامع عناصر فئة الأرقام الطبيعية على أنها فئة غير معدودة

### (١١ - ١ - ١) الفئات المتصلة والمتقطعة Continuous and Discrete Sets

يعرف فراغ المعاينة ف على أنه فراغ معاينة متقطع إذا كان يحتوي على عدد محدود من النقاط أو على عدد غير محدود من النقاط (لا نهاية) التي يمكن مطابقة عناصرها مع عناصر فئة من الأرقام الطبيعية الصحيحة الموجبة. ومن الأمثلة على ذلك عدد الطلاب، عدد الكتب. . . الخ.

أما فراغ المعاينة المتصل فهو فراغ المعاينة الذي يحتوي على نقاط غير محدودة وغير معدودة ومن الأمثلة على ذلك أطوال الطلاب في إحدى المدارس وأوزانهم.

### (١٢ - ١ - ١) بعض العلاقات الجبرية بين الفئات

يوجد علاقات جبرية هامة في نظرية الفئات نشير هنا إلى بعضها وتستخدم أشكال فن في برهنتها.

إذا كانت الفئة الشاملة ف هي

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

والفئات الجزئية أ١، أ٢، أ٣ هي

أ١ = {١، ٢، ٣، ٧، ٩، ١٠}

أ٢ = {١، ٢، ٣، ٦، ٨، ١٠}

أ٣ = {١، ٢، ٤، ٥، ١٠}

فإننا باستخدام أشكال فن نستطيع إثبات صحة العلاقات التالية:

١ - $أ_١ \cup أ_٢ = أ_١ + أ_٢ - أ_١ \cap أ_٢$

= {١، ٢، ٣، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

٢ - $أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ = أ_١ + أ_٢ + أ_٣ - أ_١ \cap أ_٢ - أ_١ \cap أ_٣ - أ_٢ \cap أ_٣ + أ_١ \cap أ_٢ \cap أ_٣$

= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}

ويمكن تعميم هذه القاعدة لأي عدد من الفئات حيث يتم طرح التقاطعات الزوجية وإضافة التقاطعات الفردية للفئات الموجودة في الاتحاد.

٣- $\bar{\text{أ}}_{1} \cup \bar{\text{أ}}_{2} = \underline{\text{ف} - \text{أ}_{1}} \cap \text{أ}_{2}$

$= \text{أ}_{1} \cap \text{أ}_{2}$

$= \{٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩\}$

٤- $\bar{\text{أ}}_{1} \cap \bar{\text{أ}}_{2} = \underline{\text{ف} - \text{أ}} \cup \text{أ}_{2}$

$= \text{أ}_{1} \cup \text{أ}_{2}$

$= \{٤ ، ٥\}$

# الفصل الثاني

## التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

يهدف هذا الفصل، الذي سيكون له تطبيقات كثيرة في الفصول القادمة، إلى تعداد الأشكال المختلفة للمجموعات التي يمكن تكوينها من أشياء مفروضة من زمرة واحدة ضمن شروط معروفة مقدماً، كما سيتم استكمالا لهذا البحث إستعراض نظرية ذات الحدين.

### (١ - ٢ - ١) التباديل

لإعطاء فكرة عن مفهوم التباديل فإننا نبدأ بالمثال التالي:

إذا كان الطريقان الرئيسيان اللذان يربطان بين مدينتي عمان واربدهما أ، ب (طريق جرش وطريق المفرق) فإنه يمكن توضيح الطرق التي يمكن أن تسلكها السيارة في الذهاب والأياب بين المدينتين على النحو التالي:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| طريق الذهاب | أ | ب | أ | ب |
| طريق العودة | أ | ب | أ | ب |

ويلاحظ هنا بأن الذهاب يمكن أن يتم بالطريقين وأن كل طريق من طرق الذهاب يمكن أن يقترن بطريق من طرق العودة.

**قاعدة:**

إذا كانت عملية ما تتم بعدد من الطرق مقداره $ن_١$ وعملية أخرى تتم بعدد من الطرق مقداره $ن_٢$ فإن العمليتين معاً تتمان بعدد من الطرق مقداره $ن_١ \times ن_٢$. وفي المثال السابق فإن عدد طرق الذهاب $ن_١ = ٢$ وعدد طرق الأياب $ن_٢ = ٢$ وعدد الطرق الممكنة $= ٢ \times ٢ = ٤$.

ويمكن تعميم هذه القاعدة لأي عدد من العمليات.

تشكيل وتعداد التباديل لـ ن من العناصر:

إذا كانت لدينا مجموعة من العناصر عددها ن فإننا نحصل على كل التباديل الممكنة لهذه العناصر إذا تم توزيعها حسب الأشكال (التراتيب) الممكنة.

فمثلاً إذا كان لدينا ثلاث بطاريات أ، ب، جـ من ثلاثة أحجام مختلفة فإننا نستطيع ترتيب البطاريتين أ، ب بعدد من الطرق ٣×٢، وفي هذه الحالة فإنه لا يبقى للبطارية حـ سوى مكان واحد وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة لترتيب البطاريات الثلاث ٣×٢×١.

ويمكن تعميم هذه القاعدة لأي عدد من العناصر، فإذا كان لدينا ن من العناصر ونريد توزيعها بكل الطرق الممكنة فإن عدد هذه الطرق

= ن (ن − ١) (ن − ٢) . . . . . ×٣×٢×١

= ن!

أي أن عدد الطرق التي يمكن بواسطتها ترتيب ن من العناصر يساوي مضروب ن Factorial

أما إذا كان لدينا ن من العناصر وأردنا أن نختار من بينها ر عنصراً فإننا نستطيع ترتيبها بعدد من الطرق

= $^{ن}ل_{ر}$

= ن ( ن − ١) (ن − ٢) . . . . . (ن − ر + ١)

$$= \frac{ن\ !}{(ن - ر)\ !} \qquad (١ - ٢ - ١)$$

ويسمى هذا المقدار ن تباديل ر

**(٢ ـ ٢ ـ ١) *التوافيق***

إذا تقدم أربعة أشخاص للحصول على بعثة دراسية وكان المطلوب هو اختيار اثنين منهم، فإن عدد طرق اختيار الممكنة هو $^{٤}ق_{٢}$ = $\frac{٤\times٣}{٢\times١}$ =٦ ويمكن حصرها على النحو التالي:

| | | |
|---|---|---|
| أ ب | أ جـ | أ د |
| ب جـ | ب د | جـ د |

وهذا يعني أن هنالك ست طرق ممكنة للاختيار وتسمى هذه الطريقة في الاختيار بالتوافيق.

وبشكل عام إذا كان لدينا ن عنصر وأردنا إختيار ر عنصر منها بصرف النظر عن الترتيب فإن عدد طرق الاختيار الممكنة هو $^{ن}ق_{ر}$ ويرمز له أحياناً بالرمز $\binom{ن}{ر}$.

من الواضح أن عدد التوافيق أقل من عدد التباديل لأننا في حالة التوافيق لا نهتم بالترتيب حيث أن إرسال أ، ب في بعثة دراسية يماثل تماماً إختيار ب، أ لنفس البعثة. أما في حالة التباديل فإننا نهتم بالتراتيب فإذا كان المطلوب هو منح جائزتين فالأولى لمن يأتي في الترتيب الأول والثانية لمن يأتي في الترتيب الثاني والفرق واضح بين الترتيبين (أ، ب)، (ب، أ). ويرجع هذا إلى أننا في حالة التباديل لعدد من العناصر نقوم بعمليتين منفصلتين:

الأولى هي عملية الإختيار للعناصر الداخلة في المجموعة.

الثانية هي عملية الترتيب لهذه العناصر داخل المجموعات التي يمكن اختيارها في حين نركز الاهتمام في حالة التوافيق على عملية إختيار العناصر الداخلة في المجموعةبصرف النظر عن ترتيبها.

**مثال:**

إذا كان لدينا ٤ أشخاص وأردنا إختيار لجنة مكونة من شخصين مع الإهتمام بترتيب الشخصين في اللجنة المختارة فإن عدد طرق الاختيار هو

$$^{٤}ل_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة على خطوتين:

عدد طرق اختيار ٢ من ٤ هو

$$\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

عدد الطرق التي ترتب بها شخصين مختلفين هو ٢! = ٢

∴ عدد طرق الإختيار = ٦×٢ = ١٢

وهي نفس النتيجة السابقة

هذا في حين أن عملية التوافيق تقتصر على الخطوة الأولى.

**قاعدة ١:**

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!} \qquad (٢ - ٢ - ١)$$

قاعدة ٢ :

إذا كانت ن = ر

$$\text{فان } \binom{ن}{ن} = \frac{ن!}{ن!\,(ن - ن)!} = ١ \qquad (٣ - ٢ - ١)$$

حيث أن مضروب الصفر = ١ بالتعريف.

قاعدة ٣ :

إذا كانت ر = ن − ر

$$\text{فان } \binom{ن}{ن - ر} = \frac{ن!}{(ن - ر)\,ر!} = \binom{ن}{ر} \qquad (٤ - ٢ - ١)$$

قاعدة ٤ :

$$\binom{ن}{١} + ١ = \binom{ن + ١}{١} = ن + ١ \qquad (٥ - ٢ - ١)$$

حيث

$$\binom{ن}{١} + ١ = \frac{ن!}{١!\,(ن - ١)!} + ١ = ن + ١$$

$$\binom{ن + ١}{١} = \frac{(ن + ١)!}{١!\,ن!} = ن + ١$$

قاعدة ٥ :

$$\binom{ن}{ر} + \binom{ن}{ر - ١} = \binom{ن + ١}{ر} \qquad (٦ - ٢ - ١)$$

حيث

$$\binom{ن}{ر} + \binom{ن}{ر - ١} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!} + \frac{ن!}{(ر - ١)!\,(ن - ر + ١)!}$$

$$= \frac{ن!\,(ن - ر + ١)}{ر!\,(ن - ر + ١)\,(ن - ر)!} + \frac{ن!\,ر}{ر\,(ر - ١)!\,(ن - ر + ١)!}$$

$$= \frac{ن!\,(ن - ر + ١)}{ر!\,(ن - ر + ١)!} + \frac{ن!\,ر}{ر\,(ر - ١)!\,(ن - ر + ١)!}$$

$$= \frac{\text{ن}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١) + \text{ن}!\,\text{ر}}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١)!} = \frac{\text{ن}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١ + \text{ر})}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١)!}$$

$$= \frac{\text{ن}!\,(\text{ن} + ١)}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١)!} = \frac{(\text{ن} + ١)!}{\text{ر}!\,(\text{ن} - \text{ر} + ١)!} = \binom{\text{ن} + ١}{\text{ر}}$$

**تمرين ١ :**

إذا كان لدينا كيس به ٧ كرات بيضاء، ٦ كرات حمراء، ٤ كرات سوداء، بكم طريقة يمكن سحب ١٠ كرات منها ٤ بيضاء، ٣ حمراء، ٣ سوداء.

**الحل:**

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٤ كرات بيضاء من بين ٧ كرات هو

$$\binom{٧}{٤} = \frac{٧!}{٤!\,(٧ - ٤)!} = ٣٥$$

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٣ كرات حمراء من بين ٦ كرات هو

$$\binom{٦}{٣} = \frac{٦!}{٣!\,(٦ - ٣)\,١} = ٢٠$$

عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها ٣ كرات سوداء من بين ٤ كرات هو

$$\binom{٤}{٣} = \frac{٤!}{٣!\,(٤ - ٣)!} = ٤$$

وحيث أن هذه العمليات ستحدث معاً فإن عدد الطرق المطلوب

$$= \binom{٧}{٤} \times \binom{٦}{٣} \times \binom{٤}{٣}$$

$$= ٣٥ \times ٢٠ \times ٤ = ٢٨٠٠$$

**تمرين ٢ :**

إذا كان لدينا ستة رجال، ست نساء وأربعة أطفال فبكم طريقة يمكن إختيار مجموعة مكونة من أربعة أفراد بحيث تحتوي على رجلين على الأقل.

**الحل:**

قد يكون لدينا مجموعة مؤلفة من رجلين (والباقي من النساء والأطفال) وعدد

الطرق في هذه الحالة هو

$$\binom{٦}{٢} \times \binom{١٠}{٢} = \frac{٦!}{٢!\,(٦-٢)!} \times \frac{١٠!}{٢!\,(١٠-٢)!} = ١٥ \times ٤٥ = ٦٧٥$$

وقد تكون لدينا مجموعة من ثلاثة رجال (والباقي طفل أو امرأة) وعدد الطرق في هذه الحالة هو

$$\binom{٦}{٣} \times \binom{١٠}{١} = \frac{٦!}{٣!\,(٦-٣)!} \times \frac{١٠!}{١!\,(١٠-١)!} = ٢٠ \times ١٠ = ٢٠٠$$

كما قد تكون المجموعة كلها من الرجال وعدد الطرق في هذه الحالة

$$\binom{٦}{٤} \times \binom{١٠}{٠} = \frac{٦!}{٤!\,(٦-٤)!} \times \frac{١٠!}{٠!\,(١٠-٠)!} = ١٥$$

وبما أن أية حالة من حالة من الحالات السابقة تحقق المطلوب فإن عدد الطرق الممكنة هو

$$\binom{٦}{٢} \times \binom{١٠}{٢} + \binom{٣}{٦} \times \binom{١٠}{١} + \binom{٦}{٤} \times \binom{١٠}{٠} =$$

$$= ٦٧٥ + ٢٠٠ + ١٥ = ٨٩٠$$

### (٣ ـ ٢ ـ ١) نظرية ذات الحدين

المقدار (أ + ب) مقدار جبري ذو حدين أ، ب، والنظرية التي تعطينا مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}}$ تسمى نظرية ذات الحدين، ويقول منطوق نظرية ذات الحدين أنه إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{\text{ن}-١}\,\text{ب} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{\text{ن}-٢}\,\text{ب}^{٢} + \dots\dots + \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,\text{ب}^{\text{ر}} + \dots\dots + \text{ب}^{\text{ن}} \qquad (٧ ـ ٢ ـ ١)$$

ولإثبات هذه النظرية يمكن الرجوع إلى كتب الرياضيات

خواص معاملات مفكوك ذات الحدين:

١ - من المعادلة (٧ ـ ٢ ـ ١) يتضح أن معاملات مفكوك ذات الحدين هي $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$ لجميع قيم ر الممكنة ر = ٠، ١، ٢، ......، ن

وعدد حدود هذا المفكوك = ن + ١

أي أنه يزيد على قيمة الاس بواحد.

٢ - مجموع معاملات مفكوك ذات الحدين = $٢^{ن}$

حيث أنه إذا كانت أ = ١، ب = ١

فإن $(١+١)^{ن} = \binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} + \binom{ن}{٢} + \ldots\ldots + \binom{ن}{ر} + \ldots\ldots + \binom{ن}{ن}$

أي أن $٢^{ن} = \binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} + \binom{ن}{٢} + \ldots\ldots + \binom{ن}{ر} + \ldots\ldots + \binom{ن}{ن}$

٣ - رتب العالم الرياضي باسكال معاملات ذات الحدين في جدول سمي باسمه نوضحه أثناء دراستنا لتوزيع ذي الحدين في الفصل الأول من الباب الرابع.

٤ - معاملات الحدين المتساويين في البعد عن الطرفين متساويين، أي أن:

معامل الحد الأولى = معامل الحد الأخير

معامل الحد الثاني = معامل الحد قبل الأخير.

وبشكل عام فإن معامل الحد الذي ترتيبه ر يساوي معامل الحد الذي ترتيبه ن - ر كما يتضح من المعادلة (٤ - ٢ - ١)

٥ - لايجاد مفكوك (س - أ) فإننا نكتب هذا المقدار على النحو التالي

$$(س + (- أ))^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} \binom{ن}{ر} س^{ن - ر} (- أ)^{ر}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} (- أ)^{ر} \binom{ن}{ر} س^{ن-ر} أ^{ر} \qquad (٨ - ٢ - ١)$$

٦ - يمكن تطبيق نظرية ذات الحدين لايجاد مفكوك أي مقدار جبري بأي عدد من الحدود (ثلاثة أو أكثر وذلك بتجميع هذه الحدود في حدين وإيجاد المفكوك بالطريقة السابقة.



# الفصل الثالث

## المصفوفات

**(١ - ٣ - ١) تعريف:**

تعرف المصفوفة Matrix على أنها منظومة من العناصر الموضوعة في عدد من الصفوف والأعمدة المحاطة بأقواس كما يلي:

$$\begin{bmatrix} أ_{١ن٢} & .... & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢ن٢} & .... & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{ن١ن٢} & .... & أ_{ن١٢} & أ_{ن١١} \end{bmatrix}$$

وتسمى الأرقام أو القيم $أ_{رو}$ عناصر المصفوفة حيث يشير الرمز إلى رقم الصف والرمز وإلى رقم العمود الذي يقع به هذا العنصر.

تسمى المصفوفة التي تحتوي على $ن_١$ صف و$ن_٢$ عمود مصفوفة من الترتيب $ن_١ \times ن_٢$ ويمكن الإشارة إلى هذه المصفوفة كما يلي $[أ_{رو}]_{ن_١ \times ن_٢}$

هذا ويمكن أن نعبّر عن مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة أو غير المتجانسة بالمصفوفات كما هو مبيّن في المثال التالي

س + ٥ ص + ٣ ع = صفر

٤ س + ٧ ص + ٢ ع = صفر

٦ س + ٤ ص + ٨ ع = صفر

$$أ_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٧ & ٤ \\ ٨ & ٤ & ٦ \end{bmatrix} ، \quad م \times \begin{bmatrix} س \\ ص \\ ع \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} صفر \\ صفر \\ صفر \end{bmatrix}$$

ويمكن استخدام المصفوفات في حل مثل هذه المعادلات

**(٢ - ٣ - ١) تعريف:**

إذا كان عدد صفوف المصفوفة أ يساوي عدد أعمدتها (أي أن ن١=ن٢=ن) فإننا نقول بأن المصفوفة أن×ن مصفوفة مربعة من الترتيب ن Square Matrix وتسمى العناصر الواقعة على القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة أ١١، أ٢٢، . . . . . أنن بالعناصر القطرية للمصفوفة Diagonal Elements ويسمى مجموع العناصر القطرية للمصفوفة أنن مقدار المصفوفة أ Trace of

**(٣ - ٣ - ١) تعريف):**

يقال بأن المصفوفتين أ = {أرو} ، ب = {برو} مصفوفتين متساويتين Equal Matrices فقط إذا كانت المصفوفتان أ، ب لهما نفس الترتيب وكان كل عنصر في أحدهما يساوي العنصر المقابل له في المصفوفة الأخرى

أرو = برو لجميع قيم ر = ١، ٢، . . . . ن١، و = ١، ٢، . . . ن٢

**(٤ - ٣ - ١) تعريف: المصفوفة الصفرية Zero Matrix**

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي كل عناصرها أصفار.

**(٥ - ٣ - ١) جمع المصفوفات Summation**

إذا كانت لدينا المصفوفتان أ = {أرو} ، ب = {برو} ولهما نفس الترتيب ن١ × ن٢ فإن مجموع هاتين المصفوفتين (أو الفرق بينهما) يمكن أن يعرف على أنه مصفوفة جديدة: جـ = {جـرو} بنفس الترتيب ن١ × ن٢ وكل عنصر من عناصرها هو حاصل جمع (أو طرح) العنصرين المتناظرين في المصفوفتين أ ، ب ، أي أن

جـرو = أرو ± برو

**مثال ١:**

إذا كان لدينا المصفوفتان

أ = [ صفر ١ ٢ ؛ ٣ ٢ ٤ ؛ ١ ٣ ٦ ] ، ب = [ ١ ٤ ٥ ؛ ٢ ٣ صفر ؛ ٧ ١ ١ ]

فإن

$$أ + ب = \begin{bmatrix} \text{صفر} + ١ & ١ + ٤ & ٢ + ٥ \\ ٣ + ٢ & ٢ + ٣ & ٤ + \text{صفر} \\ ١ + ٧ & ٣ + ١ & ٦ + ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٥ & ٧ \\ ٥ & ٥ & ٤ \\ ٨ & ٤ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$أ - ب = \begin{bmatrix} \text{صفر} - ١ & ١ - ٤ & ٢ - ٥ \\ ٣ - ٢ & ٢ - ٣ & ٤ - \text{صفر} \\ ١ - ٧ & ٣ - ١ & ٦ - ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ & -٣ & -٣ \\ ١ & -١ & ٤ \\ -٦ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث مصفوفات من نفس الترتيب (أي إنها قابلة للجمع Conformable for addition) فإن

أ + ب = ب + أ

أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ

**(٦ - ٣ - ١) ضرب المصفوفات في ثابت**

إن ضرب المصفوفة أ بالثابت ث يعني ضرب كل عنصر من عناصرها بهذا الثابت، أي أن

$ث\ أ = ث\ \{أ_{رو}\}$

$أ\ ث = \{أ_{رو}\}\ ث$

**(٧ - ٣ - ١) ضرب المصفوفات**

إذا كانت المصفوفتان أ = $\{أ_{رو}\}$ ، ب = $\{ب_{رو}\}$ قابلتين للضرب (عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية) ورمزنا لمصفوفة حاصل ضربها بالرمز جـ = $\{جـ_{رو}\}$ فإن كل عنصر من عناصر جـ عبارة عن حاصل ضرب الصف والعمود المقابلين لهذا العنصر بنفس الترتيب في المصفوفتين أ ، ب.

**مثال ٢ :**

إذا كان لدينا المصفوفتان

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٢ & \text{صفر} & ٤ \\ ٥ & ٢ & ٧ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ٣ & ٢ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

فإن عدد الأعمدة في المصفوفة أ = عدد الصفوف في المصفوفة ب وبالتالي فإن:

$$\text{أ ب} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ٤ & \text{صفر} & ٢ \\ ٧ & ٢ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢٤ & ١٨ \\ ٣٠ & ٢٠ \\ ٥٨ & ٤١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٧ \times ٣ + ٢ \times ١ + ١ \times ١ & ٥ \times ٣ + ٣ \times ١ + \text{صفر} \times ١ \\ ٧ \times ٤ + ٢ \times \text{صفر} + ١ \times ٢ & ٥ \times ٤ + ٣ \times \text{صفر} + \text{صفر} \times ٢ \\ ٧ \times ٧ + ٢ \times ٢ + ١ \times ٥ & ٥ \times ٧ + ٣ \times ٢ + \text{صفر} \times ٥ \end{bmatrix}$$

وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفتان أ = $\{أ_{رو}\}$ من الترتيب $ن_١ \times ن_٢$ ، ب = $\{ب_{رو}\}$ من الترتيب $ن_٢ \times ن_٣$ فإن الحد العام لحاصل ضرب المصفوفتين أ ، ب هو $جـ_{رو} = \sum_{ك=١}^{ن_٢} أ_{رك}\, ب_{كو}$ والمصفوفة جـ = $\{جـ_{رو}\}$ من الترتيب $ن_١ \times ن_٣$

أي أن $\quad أ_{ن_١ \times ن_٢} \cdot ب_{ن_٢ \times ن_٣} = جـ_{ن_١ \times ن_٣}$

وإذا كانت المصفوفتان أ ، ب مربعتين ومن نفس الترتيب فإن

أ ب ≠ ب أ

وإذا كانت المصفوفات أ ، ب ، جـ قابلة للجمع والضرب فإن

أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ

(أ + ب) جـ = أ جـ + ب جـ

أ (ب جـ) = (أ ب) جـ

وإذا كانت المصفوفتان أ = $\{أ_{رو}\}$ من الترتيب $ن_١ \times ن_٢$

ب = $\{ب_{رو}\}$ من الترتيب $ن_٢ \times ن_٣$

فإنه من الممكن تجزئة كل منهما إلى مصفوفات جزئية قبل إجراء عملية الضرب

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{bmatrix} \qquad \text{ب} = \begin{bmatrix} ب_{٢١} & ب_{١١} \\ ب_{٢٢} & ب_{١٢} \\ \\ ب_{٢٣} & ب_{١٣} \end{bmatrix}$$

ثم تتم عملية الضرب بين المصفوفتين بنفس الطريقة السابقة حيث تعتبر المصفوفات الجزئية عناصر لهذه المصفوفات.

### (٨ - ٣ - ١) بعض أنواع المصفوفات

**١ - مصفوفة الوحدة** The Identity Matrix

تعرف مصفوفة الوحدة على إنها مصفوفة مربعة كل عناصرها أصفار فيما عدا العناصر على القطر الرئيسي حيث يساوي كل منها الواحد الصحيح ويرمز لها بالرمز I حيث

$$I = \begin{bmatrix} ١ & \text{صفر} & \text{صفر} & \cdots\cdots & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ١ & \text{صفر} & \cdots\cdots & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & ١ & \cdots\cdots & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & \text{صفر} & \cdots\cdots & ١ \end{bmatrix}$$

وتتصف مصفوفة الوحدة بعدد من الخصائص أهمها:

أ - إذا جمعنا مصفوفة الوحدة $I_{ن \times ن}$ ك مرة فإننا نحصل على مصفوفة جديدة جميع عناصرها أصفار فيما عدا العناصر على القطر الرئيسي حيث يساوي كل منها ك وتسمى بالمصفوفة القياسية

ب - إذا ضربنا مصفوفة الوحدة $I_{ن \times ن}$ ك مرة فإننا نحصل على مصفوفة $I_{ن \times ن}$

جـ - إذا ضربنا مصفوفة الوحدة $I_{ن \times ن}$ بمصفوفة أخرى $أ_{ن \times م}$ فإننا نحصل على المصفوفة نفسها $أ_{ن \times م}$، أي أ × I = أ

**٢ - المصفوفات التبادلية** **Commutative Matrices**

يقال أن المصفوفتين المربعتين تبادليتان إذا كان

أ ب = ب أ

ومن الواضح أن كل مصفوفة مربعة هي مصفوفة تبادلية مع نفسها ومع مصفوفة الوحدة.

**٣ - مقلوب المصفوفة** **The Inverse of a Matrix**

يقال بأن المصفوفة أ هي مقلوب المصفوفة ب إذا كان

أ ب = ب أ = I

ويشار إلى ذلك بأن $أ = ب^{-1}$

$ب = أ^{-1}$

وإذا كانت المصفوفتان أ ، ب من نفس الترتيب ومقلوباهما $أ^{-1}$ ، $ب^{-1}$ فإن

$(أ ب)^{-1} = أ^{-1} \times ب^{-1}$

## ٤ ـ تحوير المصفوفة The Transpose of a Matrix

إذا كان لدينا المصفوفة أ من الترتيب $ن_1 \times ن_2$ فإننا نحصل على تحوير هذه المصفوفة بتحويل صفوفها إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف بحيث أن العنصر $أ_{رو}$ في المصفوفة الأصلية يصبح $أ_{ور}$ في تحوير المصفوفة، ونشير إلى مصفوفة التحوير بـ $أ'$ بحيث أن

$أ = \{أ_{رو}\}$ ، $أ' = \{أ_{ور}\}$

**مثال ٣:**

إذا كان لدينا المصفوفة

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٧ & ١ \end{bmatrix} \quad فإن\ أ' = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٦ & ٧ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$$

إذا كان $أ'$ ، $ب'$ هما تحويرا المصفوفتين أ ، ب وكان لدينا الثابت ث فإن من خصائص التحوير أن

$(أ')' = أ$

$(ث\ أ)' = ث\ أ'$

$(أ + ب)' = أ' + ب'$

$(أ\ ب)' = ب'\ أ'$

## ٥ ـ المصفوفات المتماثلة Symmetric Matrices

نقول بأن المصفوفة أ هي مصفوفة متماثلة إذا كان

$أ' = أ$

وهذا يعني $\{أ_{رو}\} = \{أ_{ور}\}$ لجميع قيم ر = ١ ، ٢ ، . . . .

و = ١ ، ٢ ، . . . .

وإذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن ث أ هي أيضاً مصفوفة متماثلة حيث ث ثابت اختياري.

### (٩ - ٣ - ١) المحددات **Determinants**

**١ - المحدّدات من الترتيب ٢ × ٢** Determinants 2 × 2

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة أ من الترتيب ٢ × ٢ فإن محدّد هذه المصفوفة والذي يشار إليه بالرمز |أ| يمكن حساب قيمته كما يلي:

$$\{أ_{رو}\} = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{bmatrix} ، \quad |أ| = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{vmatrix} = أ_{١١}\, أ_{٢٢} - أ_{٢١}\, أ_{١٢}$$

**مثال ٤:**

إذا كان لدينا المصفوفة

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٩ \end{bmatrix}$$

$$فإن\ |أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix} = ١ \times ٩ - ٢ \times ٤ = ٩ - ٨$$

**٢ - المحددات من الترتيب ٣ × ٣ فما فوق**

**الطريقة الأولى:**

إذا كانت المصفوفة أ من الترتيب ٣ × ٣ فإن محدد هذه المصفوفة يمكن الحصول عليه كما يلي

أ - يتم وضع المحدد مكرراً كما هو مبين أدناه

$$\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \\ أ_{١٣} & أ_{٢٣} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ب ـ نقوم بإجراء عملية الضرب كما يلي

$$|\text{أ}| = \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣} + \text{أ}_{٢١}\,\text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}_{١٣} + \text{أ}_{٣١}\,\text{أ}_{١٢}\,\text{أ}_{٢٣} - \text{أ}_{١١}\,\text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}_{٢٣} - \text{أ}_{٢١}\,\text{أ}_{١٢}\,\text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣١}\,\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{١٣}$$

جـ ـ يتم تحديد الإشارات كما هو مبين على الأسهم في المحدد المكرر أعلاه

**الطريقة الثانية:**

يمكن الحصول على قيمة محدد المصفوفة أ بفك المحدد باستخدام أحد الصفوف أو أحد الأعمدة كما يلي:

أ ـ نأخذ العنصر في الصف (أو العمود) ونضربه في المحدد المتبقي بعد حذف جميع العناصر الواقعة على الصف والعمود اللذين يحتويان ذلك العنصر.

ب ـ نكرر ذلك بالنسبة لجميع العناصر في الصف (أو العمود) الذي نقوم بفك المحدد عليه.

جـ ـ يتم تحديد الإشارة قبل هذه العناصر بجمع ترتيب الصف وترتيب العمود اللذين يقع عليهما ذلك العنصر، فإذا كان المجموع زوجياً كانت الإشارة موجبة وإذا كان المجموع فردياً كانت الإشارة سالبة.

د ـ يجري فك المحددات من الترتيب ٢ × ٢، التي يتم الحصول عليها، بالطريقة التي سبق الإشارة إليها، وتسمى المحددات التي يتم الحصول عليها بفك المحددات من الدرجة الثالثة بالمحيددات أو المحددات الصغرى Minors of the third order determinants

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$- \text{أ}_{١٢} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{١٣} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}_{١١}\,(\text{أ}_{٢٢}\,\text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣٢}\,\text{أ}_{٢٣}) - \text{أ}_{١٢}\,(\text{أ}_{٢١}\,\text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣١}\,\text{أ}_{٢٣}) + \text{أ}_{١٣}\,(\text{أ}_{٢١}\,\text{أ}_{٣٢} - \text{أ}_{٣١}\,\text{أ}_{٢٢})$$

**مثال ٥ :**

إذا كان لدينا المحدد

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ & \text{صفر} \\ ٦ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = |أ|$$

فإن قيمة هذا المحدد بالطريقة الأولى

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ١ & ٤ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٢ & \text{صفر} & ٥ & ٢ & \text{صفر} \\ ٦ & ٣ & ٤ & ٦ & ٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

|أ| = ١ × ٢ × ٦ + ٣ × ٥ × ٤ + ٤ × صفر × ٣ − ١ × ٥ × ٣ − ٣ × صفر × ٦

− ٤ × ٢ × ٤

= ١٢ + ٦٠ + صفر − ١٥ − صفر − ٣٢

= ٢٥

**وبالطريقة الثانية**

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} ٤ + \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} \text{صفر} - \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix} ١ = |أ|$$

= ١ × (٢ × ٦ − ٣ × ١٥) − صفر + ٤ × (٣ × ٥ − ٤ × ٢)

= ١ × (١٢ − ٥) + ٤ (١٥ − ٨)

= − ٣ + ٢٨

= ٢٥

**ملاحظة:** إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة يحتوي على أصفار فإن من الأسهل فك المحدد باستخدام الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار.

## (١٠ ـ ٣ ـ ١) المحيدد (أو المحدد الصغير) ومرافق العنصر

## The Minor and the Co-factor

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة أ من الدرجة ن والتي محددها |أ| فإن المحدد

الباقي بعد حذف العمود والصف اللذين يحتويان على العنصر $أ_{رو}$ يسمى بالمحدد الأول (أو الأصغر) للعنصر $أ_{رو}$ ويرمز له $|م_{رو}|$، وعليه فإن

$$أ = \begin{bmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & \cdots & أ_{١ن} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ أ_{ن١} & أ_{ن٢} & \cdots & أ_{نن} \end{bmatrix} ، \quad |م_{١١}| = \begin{bmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٣٢} & \cdots & أ_{٢ن} \\ أ_{٢٣} & أ_{٣٣} & \cdots & أ_{٣ن} \\ أ_{ن٢} & أ_{ن٣} & \cdots & أ_{نن} \end{bmatrix}$$

وإذا أضفنا إلى هذا المحدد الجديد إشارة تعتمد على مجموع ترتيب الصف والعمود اللذين يقع فيهما العنصر $أ_{رو}$ (إذا كان (ر + و) زوجياً كانت الإشارة موجبة وإذا كان فردياً كانت الإشارة سالبة) حصلنا على ما يسمى بمرافق العنصر $أ_{رو}$.

إذا كان لدينا المصفوفة أ ومحددها

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٦ \\ صفر & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$$

فإن $|م_{١١}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix}$ والمرافق للعنصر $أ_{١١}$ هو $(-١)^{١+١} \times \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٧ & ١ \end{vmatrix}$

### (١١ ـ ٣ ـ ١) رتبة المصفوفة The Rank of a Matrix

تعرف المصفوفة غير الصفرية بأنها من الرتبة ر إذا كان هنالك على الأقل واحد من محدداتها الصغرى من الدرجة ر (r-square minors) لا يساوي صفراً على أن يكون كل محدد من محدداتها الصغرى من الدرجة ر + ١ (إن وجد) يساوي صفراً.

**مثال ٧:**

إذا كان لدينا المصفوفة

$$أ = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

فإن هذه المصفوفة من الرتبة ٢ حيث أن محدد العنصر $أ_{١١} \neq$ صفر

$$|م_{١١}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ١$$

في حين أن

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٥ & ٧ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

### (١٢ ـ ٣ ـ ١) المصفوفة المعزولة وغير المعزولة
### Singular and Non-singular Matrix

إذا كان لدينا المصفوفة المربعة من الترتيب ن × ن ورتبتها = ن (أي أن | أ | ≠ صفر) فإننا نقول بأن هذه المصفوفة غير معزولة non-singular matrix، أما إذا كان ترتيبها أقل من ن (ر < ن) أي أن | أ | = صفر فإننا نقول بأن هذه المصفوفة معزولة Singular matrix وإذا كان لدينا مصفوفتان مربعتان أو أكثر من نفس الترتيب فإن حاصل ضرب هذه المصفوفات يعطي مصفوفة غير معزولة إذا كانت جميع المصفوفات الداخلة في الضرب غير معزولة ولكنه يعطي مصفوفة معزولة إذا كانت أي واحدة منها مصفوفة معزولة.

### (١٣ ـ ٣ ـ ١) المصفوفة المجاورة لمصفوفة مربعة
### The Adjoint of a Square Matrix

تعرف المصفوفة المجاورة للمصفوفة المربعة أ بأنها مصفوفة المرافقات لعناصر المصفوفة أ بعد تحويرها.

**مثـال ٨:**

إذا كانت لدينا المصفوفة

$$أ = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ & ١ \\ ٥ & ٣ & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

فإننا نحصل على المصفوفة المجاورة لهذه المصفوفة كما يلي:

١ ـ نقوم بحساب المرافقات لعناصر المصفوفة أ:

$$\text{م}_{11} = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & \text{صفر} \end{vmatrix} = -3$$

$$\text{م}_{21} = (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & \text{صفر} \end{vmatrix} = 5$$

وهكذا لجميع العناصر فنحصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -14 \\ 3 & -5 & 15 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

٢ ـ نقوم بتحوير مصفوفة المرافقات للحصول على المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ:

$$\text{مجاور أ} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -14 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

## (١٤ ـ ٣ ـ ١) مقلوب المصفوفة The Inverse of a Matrix

يعرف مقلوب المصفوفة أ (كما أشرنا في ٨ ـ ٣ ـ ١) على أنه المصفوفة التي إذا ضربت بالمصفوفة الأصلية أ أنتجت مصفوفة الوحدة، ويرمز لها بالرمز $\text{أ}^{-1}$ حيث $\text{أ} \times \text{أ}^{-1} = I$

هذا ويعتبر مقلوب المصفوفة وحيداً Unique، كما أنه لا يكون للمصفوفة المربعة أ مقلوب إلا إذا كانت غير معزولة ($|\text{أ}| \neq$ صفر).

يمكن حساب مقلوب المصفوفة المربعة وغير المعزولة أ بعدة طرق نشير هنا إلى طريقة واحدة منها وهي طريقة المصفوفة المجاورة.

لحساب مقلوب المصفوفة أ بطريقة المصفوفة المجاورة نتبع الخطوات التالية:

١ ـ نقوم بحساب قيمة محدد المصفوفة أ

٢ ـ نقوم بحساب المرافقات Co-factors لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ ثم نقوم بتحوير هذه المصفوفة للحصول على المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ.

٣ ـ نقوم بقسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ على محدد المصفوفة أ ونحصل على مقلوب المصفوفة.

**مثـال ٩:**

إذا كان لدينا المصفوفة:

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{صفر} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{١} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

فإنه يمكن حساب مقلوبها باتباع الخطوات السابقة كما يلي:

١ ـ محدد المصفوفة:

$$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{صفر} & \text{٢} & \text{١} \\ \text{صفر} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{١} & \text{صفر} \end{vmatrix} = \text{٢} \times \begin{vmatrix} \text{٢} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} \end{vmatrix} = -\text{٢}$$

أي أن المصفوفة أ غير معزولة ولها مقلوب:

٢ ـ مصفوفة المرافقات =

$$\begin{bmatrix} \text{١} & -\text{٢} & \text{٢} \\ -\text{١} & +\text{٢} & -\text{٤} \\ -\text{١} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{bmatrix}$$

٣ ـ المصفوفة المجاورة:

$$\text{مجاور أ} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & -\text{٤} & \text{٢} \\ \text{صفر} & +\text{٢} & -\text{٢} \\ -\text{١} & -\text{١} & \text{١} \end{bmatrix}$$

٤ ـ بقسمة كل عنصر من عناصر المصفوفة المجاورة للمصفوفة أ على محدد المصفـوفة أ نحصل على مقلوب المصفوفة أ:

$$\text{أ}^{-\text{١}} = \frac{\text{مجاور أ}}{|\text{أ}|} = \begin{bmatrix} \frac{\text{صفر}}{-\text{٢}} & \frac{-\text{٤}}{-\text{٢}} & \frac{\text{٢}}{-\text{٢}} \\ \frac{\text{صفر}}{-\text{٢}} & \frac{+\text{٢}}{-\text{٢}} & \frac{-\text{٢}}{-\text{٢}} \\ \frac{-\text{١}}{-\text{٣}} & \frac{-\text{١}}{-\text{٢}} & \frac{\text{١}}{-\text{٢}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{صفر} & +\text{٢} & -\text{١} \\ \text{صفر} & -\text{١} & \text{١} \\ \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \frac{+\text{١}}{\text{٢}} & \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \end{bmatrix}$$

## أسئلة وتمارين (١)

(١ - ١) إذا كانت الفئة الشاملة ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} والفئات الجزئية

أ = {١ ، ٢ ، ٣}، ب = {٣ ، ٤} ، جـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

١ - أي من الآتية صحيح وأي منها خطأ:

$\text{أ} \supseteq \text{ب}$

$\text{ب} \supseteq \text{جـ}$

$(\text{أ} \cup \text{ب}) \supseteq \text{ف}$

٢ - أوجد الفئات التالية:

$\text{أ} \cap \text{ب}$ ، $\text{أ} \cup \text{جـ}$ ، $\overline{(\text{أ} \cup \text{ب})} \cap \text{ب}$

$\overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{جـ}}$ ، $\overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}$

(٢ - ١) إذا كانت الفئة الشاملة ف تشتمل على جميع الأعـداد الصحيحة المـوجبة ١ إلى ١٠ والفئات الجزئية:

أ = {١ ، ٣ ، ٧ ، ٨} ، ب = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨} ،

جـ = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

١ - أوجد الفئات التالية:

$\text{أ} \cup \text{ب} \cup \text{جـ}$ ، $\text{أ} \cap \text{ب} \cap \text{جـ}$ ، $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$ ، $\overline{\text{أ} \cap \text{جـ}}$

$\overline{\text{أ} \cup \text{ب} \cup \text{جـ}}$ ، $\overline{\text{أ} \cap \text{ب} \cap \text{جـ}}$

٢ - حقق العلاقات التالية باستخدام أشكال فن:

$\text{أ} \cup \text{ب} = \text{أ} + \text{ب} - \text{أ} \cap \text{ب}$

$\text{أ} \cup \text{ب} \cup \text{جـ} = \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} - \text{أ} \cap \text{ب} - \text{أ} \cap \text{جـ} - \text{ب} \cap \text{جـ}$
$+ \text{أ} \cap \text{ب} \cap \text{جـ}$

$\text{أ} \cap (\text{ب} \cup \text{جـ}) = (\text{أ} \cap \text{ب}) \cup (\text{أ} \cap \text{جـ})$

$\text{أ} \cup \overline{\text{ب}} = \text{ف} - (\overline{\text{أ}} \cap \text{ب})$ .

(٣ - ١) الجدول التالي يبين توزيع ١٠٠٠ عامل في إحدى الشركات حسب الجنس

(ذكور، إناث) ومستوى التدريب (مدرّب، غير مدرّب)

| مستوى التدريب / الجنس | مدرّب | غير مدرّب | المجموع |
|---|---|---|---|
| ذكور | ٥٠٠ | ٢٠٠ | ٧٠٠ |
| إناث | ١٥٠ | ١٥٠ | ٣٠٠ |
| المجموع | ٦٥٠ | ٣٥٠ | ١٠٠٠ |

إذا رمزنا لفئة الذكور بالرمز ذ ولفئة المدرّبين بالرمز م، أوجد الفئات التالية واعط تفسيراً لكل منها:

$ذ \cap م ، \overline{ذ} \cap م ، ذ \cup م ، \overline{ذ} \cup م$

(٤ ـ ١) تقسم إحدى الشركات إلى ثلاث إدارات رئيسية عدد الموظفين الكبار في كل منها هو ٤ ، ٢ ، ٣ على الترتيب. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من كبار الموظفين بحيث يمثل كل إدارة من هذه الإدارات موظف واحد فقط.

(٥ ـ ٢) تقدم ٢٠ شخصاً في مسابقة ما بالإجابات الصحيحة للتنافس على أربع جوائز ، فبكم طريقة يمكن اختيار أربعة متسابقين من بين المتقدمين بالإجابات الصحيحة لمنحهم الجوائز المخصصة لهذه المسابقة.

(٦ ـ ١) إذا كان لدينا مجموعة مكونة من ٨ رجال، ٦ نساء، ١٠ أطفال، فبكم طريقة يمكن اختيار مجموعة من ثلاث رجال وثلاث نساء وستة أطفال.

(٧ ـ ١) كيس به ٦ كرات بيضاء، ٨ كرات خضراء، ٤ كرات سوداء،

١ ـ بكم طريقة يمكن سحب مجموعة مكونة من ٣ كرات بيضاء، ٢ كرة سوداء، ١ كرة خضراء.

٢ ـ بكم طريقة يمكن سحب مجموعة مكونة من ٤ كرات بشرط أن لا يقل عدد الكرات البيضاء في هذه المجموعة عن ٣.

(ملاحظة: السحب بدون إعادة).

(٨ ـ ١) أوجد مفكوك كل من المقادير التالية باستخدام نظرية ذات الحدين:

١ ـ $(٢ س + ص)^{٥}$

٢ - $(ع - ٢أ)^{٦}$

٣ - $(س + ٣ ص - ع)^{٣}$

٤ - $(٢ س^{٢} + ص + ٣ ع^{٣})^{٤}$

(٩ - ١) أوجد الحد الخامس في مفكوك المقدار:

$(س + ٢ ع^{٢})^{٦}$

وإذا كانت س = ٣ ، ع = ٤

أوجد قيمة هذا الحد.

(١٠ - ١) أجر العمليات التالية:

١ - $٥ \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ \end{bmatrix}$

٢ - $\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

٣ - $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ١٣ & ٩ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٦ \\ ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

٤ - $\begin{bmatrix} ٧ & ٥ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٨ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

(١١ - ١) إذا كانت لدينا المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٦ & ١ \\ ٠ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٩ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٤ & ٢ & ٠ \\ ٩ & ٧ & ٥ \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٤ & ٠ \\ ٢ & ٧ \end{bmatrix}$ ، د = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

أوجد ما يلي (إذا كان ذلك ممكناً).

١ - أ ب   ٣ - أ (جـ ب)   ٥ - أ جـ   ٧ - (أ ب)′   ٩ - ب د

٢ - أ′   ٤ - جـ′ أ   ٦ - أ ب جـ   ٨ - جـ د

# الباب الثاني

## نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها

## Probability Theory and its Applications

### مقدمة Introduction

تعتبر نظرية الإحتمالات إحدى الأدوات الإحصائية الأساسية التي تستخدم في تقييم الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من بيانات العينة.

وكلمة يحتمل أو مشتقاتها شائعة الإستعمال في حياتنا اليومية. فمثلاً نقول: يحتمل أن يكون الطقس لطيفاً هذا اليوم، أو يحتمل أن يصادف الكتاب الجديد نجاحاً كبيراً، أو يحتمل أن ينجح التلميذ في الإمتحان. وتختلف درجة الثقة في وقوع الحادث من حالة إلى أخرى ولكن يمكن القول بأننا لا نصدر أحكاماً في جميع الأحوال، وإنما نشير إلى نتائج متوقعة لتجارب افتراضية Conceptual Experiments ومع مرور الزمن اكتسبت هذه الألفاظ معان علمية إحصائية سوف نشير إليها أثناء دراستنا هذه النظرية واستخداماتها في ميادين الإستدلال الإحصائي.

وقد بدأ تطور هذا العلم في القرن السابع عشر من خلال ألعاب الرهان والمقامرة والتي تعتمد نتائجها على عنصر المصادفة، إذ لجأ كثير من المقامرين إلى علماء الرياضيات من أمثال باسكال B.Pascal وبرنولي J. Bernoulli من أجل تحسين فرصهم في الحصول على الربح. ولكن الفهم الإحصائي أو التجريبي للإحتمالات تبلور من خلال أعمال فيشر R.A. Fisher وفون مايسز R. von Mises حيث أوجد الأخير فكرة فراغ العينة Sample Space والتي ساعدت على وضع إطار رياضي لنظرية الإحتمالات مبني على نظرية القياس Measure Theory.



# الفصل الأول

## بعض التعاريف والنظريات الأساسية

## Fundamental Definitions and Theorems

### (١ - ١ - ٢) تعاريف:

**١ - الحادث Event والتجربة Experiment**

عند رمي قطعة نقود فإننا نحصل على صورة Head أو كتابة Tail، ورمي قطعة النقود يسمى تجربة وظهور أحد الوجهين يسمى حادث. ولمعرفة مدى مطابقة الوحدات المنتجة في مصنع للمواصفات المطلوبة فإننا نختار عينة من إنتاج هذا المصنع ونفحصها، وعملية اختيار العينة يسمى تجربة وكون الوحدة معيبة أو غير معيبة يسمى حادث.

**٢ - النتائج الممكنة Possible Outcomes**

وهي جميع النتائج أو الحالات التي تظهر نتيجة إجراء تجربة. فإذا رمينا قطعة نقود فإن النتائج الممكنة هي صورة أو كتابة، وإذا كان عدد أفراد الأسرة في مدينة ما يتراوح بين ٢ و ١٥ واخترنا أسرة بشكل عشوائي فإن عدد أفراد هذه الأسرة يمكن أن يكون ٢ أو ٣ أو . . . . أو ١٥.

**٣ - النتائج المواتية Favourable Outcomes**

وهي النتائج التي تحقق الحادث الذي ندرس احتمال وقوعه، فإذا رمينا زهرة طاولة وكان الحادث الذي ندرس احتمال وقوعه هو رقم زوجي فإن النتائج المواتية هي ٢ ، ٤ ، ٦، وإذا رمينا زهرتي طاولة معاً وكان الحادث الذي ندرس إحتمال وقوعه هو مجموع ٥ على الزهرتين معاً فإن النتائج المواتية هي (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) من بين ٣٦ حالة ممكنة.

### ٤ ـ النتائج المتماثلة Equally Likely Outcomes

وهي النتائج التي تكون احتمالات حدوثها متساوية، فإذا رمينا بدون تحيز زهرة طاولة كاملة التوازن فإن هذا يعني أن الظروف المهيئة للحصول على أحد الأوجه الستة يماثل الظروف المهيئة للحصول على الأوجه الأخرى ولا يوجد أي سبب لترجيح ظهور أي منها على الأخرى وفي هذه الحالة فإن الأوجه الستة لزهرة الطاولة تسمى نتائج متماثلة.

## (٢ ـ ١ ـ ٢) تعريف الإحتمال Probability Definition

يمكن تعريف الإحتمال بطريقتين:

### ١ ـ التعريف التقليدي للإحتمال Classical Definition of Probability

إذا كان الحادث أ يحدث م مرة من مجموع ن مرة، وكانت نتائج هذه المرات متماثلة فإن إحتمال وقوع الحادث أ، ح (أ)، هو

$$ح\,(أ) = \frac{\text{عدد النتائج المواتية للحادث أ}}{\text{عدد النتائج الممكنة}} = \frac{م}{ن} \qquad (١ ـ ١ ـ ٢)$$

فإذا رمينا زهرة طاولة فإن إحتمال الحصول على رقم ١ هو

$$ح\,(١) = \frac{١}{٦}$$

واحتمال الحصول على رقم زوجي هو

$$ح\,(٢، ٤، ٦) = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

ويواجه استخدام هذا التعريف في الحياة العملية صعوبات أهمها:

أ ـ صعوبة توفر الصفات متنافية أو متماثلة في الحوادث التي ندرس إحتمال وقوعها.

ب ـ صعوبة التوصل إلى إجابة إذا كان عدد النتائج الممكنة لا نهائي.

جـ ـ صعوبة الإجابة على بعض الأسئلة مثل:

ما هو احتمال أن يكون المولود ذكراً؟ ..

ما هو احتمال أن يحترق المصباح الكهربائي قبل أن يصل عمر ١٠٠٠ ساعة؟

ما هو احتمال أن يموت رجل عمره ٢٠ عاماً قبل أن يصل إلى سن الخمسين؟

والاحتمالات المعرفة بالطريقة التقليدية تسمى الإحتمالات القبلية.

وسوف نعود لدراسة هذا النوع من الإحتمالات أثناء عرضنا لنظرية بيز.

### ٢ ـ تعريف الاحتمال بالتكرار النسبي Definition of Probability by Relative Frequency

إذا كررت تجربة ما تحت نفس الظروف ن من المرات وكان عدد النتائج المواتية لحادث معين أ هو م مرة فإن التكرار النسبي للحادث أ هو

$$ح(أ) = \frac{م}{ن} \text{ ، حيث } (م \leqslant ن) \qquad (٢ ـ ١ ـ ٢)$$

فمثلاً إذا رمينا قطعة نقود ١٠٠ مرة وظهرت الصورة في ٤٠ رمية منها، فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو

$$\text{التكرار النسبي لظهور الصورة} = \frac{٤٠}{١٠٠} = ٠,٤٠$$

وإذا كانت قطعة النقود كاملة التوازن والرامي غير متحيز فإن

$$\lim_{ن \to \infty} \frac{م}{ن} = \frac{١}{٢}$$

وإذا أردنا معرفة نسبة الوحدات غير المطابقة للمواصفات المطلوبة (معيبة) في إنتاج آلة معينة وأخذنا عينة من إنتاج هذه الآلة حجمها ن وفحصنا هذه العينة ووجدنا أن عدد الوحدات المعيبة هو م فإن:

$$\text{التكرار النسبي للوحدات المعيبة} = \frac{م}{ن}$$

وتعريف الإحتمال بالتكرار النسبي تعريف إحصائي ويسمى أيضاً الإحتمال المقدّر Estimated Probability أو الإحتمال التجريبي. Empirical Probability

### (٣ ـ ١ ـ ٢) قوانين جمع وضرب الإحتمالات Addition and Multiplication Laws of Probability

للإلمام بقوانين جمع وضرب الإحتمالات فإنه يلزم فهم واستيعاب التعاريف التالية:

#### ١ ـ الحوادث المتنافية Mutually Exclusive Events

يقال أن الحادثين $أ_١$ ، $أ_٢$ متنافيان إذا استحال حدوثهما معاً. فعند رمي قطعة

نقود فإنه من المحال الحصول على صورة وكتابة في نفس الوقت، وعند رمي زهرة طاولة فإنه لا يمكن الحصول على وجهين معاً.

### ٢ ـ الحوادث الشاملة Exhaustive Events

تسمى الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، أن حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لا بدّ من حدوث أحدها عند إجراء التجربة، فالوجوه التي عليها الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ في زهر الطاولة تعتبر حوادث شاملة.

### ٣ ـ الإحتمال الشرطي Conditional Probability

إذا اعتبرنا مجموعة من أوراق اللعب وسحبنا ورقة منها دون النظر إليها فإن إحتمال أن تحمل هذه الورقة رقم ٧ إذا علمنا من شخص آخر ينظر إليها أنها ديناري هو $\frac{١}{١٣}$. فإذا رمزنا لحادث سحب ورقة تحمل الرقم ٧ بالرمز $أ_١$ وحادث سحب ورقة ديناري بالرمز $أ_٢$ فإنه يمكن التعبير عن الإحتمال الشرطي السابق بالرموز على النحو التالي:

$$ح (أ_١ / أ_٢) = \frac{١}{١٣}$$

ويقرأ الطرف الأيمن من هذا التعبير إحتمال وقوع الحادث $أ_١$ إذا علم أن الحادث $أ_٢$ قد وقع.

### ٤ ـ الحوادث المستقلة Independent Events

يقال أن الحادثين $أ_١$ ، $أ_٢$ مستقلان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يؤثر على وقوع الآخر، وفي هذه الحالة فإن

$$\left.\begin{array}{l} ح (أ_١ / أ_٢) = ح (أ_١) \\ ح (أ_٢ / أ_١) = ح (أ_٢) \end{array}\right\} \qquad (٣ - ١ - ٢)$$

### أولاً قانون جمع الاحتمالات Addition of Probabilities

إذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ حادثين مختلفين فإن

$$ح (أ_١ \cup أ_٢) = ح (أ_١) + ح (أ_٢) - ح (أ_١ \cap أ_٢) \qquad (٤ - ١ - ٢)$$

وإذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ثلاث حوادث مختلفة فإن:

$$ح (أ_1 \cup أ_2 \cup أ_3) = ح (أ_1) + ح (أ_2) + ح (أ_3)$$
$$- ح (أ_1 \cap أ_2) - ح (أ_1 \cap أ_3) - ح (أ_2 \cap أ_3)$$
$$+ ح (أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3) \qquad (٥ - ١ - ٢)$$

ويمكن تعميم هذا القانون على أكثر من ثلاث حوادث.

إذا كان $أ_1$ ، $أ_2$ حادثين متنافيين فإن $ح (أ_1 \cap أ_2)$ = صفر وتؤول المعادلة (٤ - ١ - ٢) إلى

$$ح (أ_1 \cup أ_2) = ح (أ_1) + ح (أ_2) \qquad (٦ - ١ - ٢)$$

وإذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ حوادث متنافية فإن $ح (أ_1 \cap أ_2)$=صفر ، $ح (أ_1 \cap أ_3)$ = صفر، $ح (أ_2 \cap أ_3)$ = صفر ، $ح (أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3)$ = صفر وتؤول المعادلة (٥ - ١ - ٢) إلى

$$ح (أ_1 \cup أ_2 \cup أ_3) = ح (أ_1) + ح (أ_2) + ح (أ_3) \qquad (٧ - ١ - ٢)$$

وبشكل عام إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، . . . ، $أ_ن$ حوادث متنافية فإن:

$$ح (أ_1 \cup أ_2 \cup \ldots\ldots \cup أ_ن) = ح (أ_1) + ح (أ_2) + \ldots\ldots + ح (أ_ن)$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} ح (أ_ر) \qquad (٨ - ١ - ٢)$$

أي أن إحتمال المجموع يساوي مجموع الإحتمالات، ويسمى هذا قانون جمع الاحتمالات.

## نتائج

**نتيجة (١)**

**إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، . . . . . . ، $أ_ن$ حوادث شاملة فإن**

$$ح (أ_1 \cup أ_2 \cup \ldots\ldots \cup أ_ن) = ١ \qquad (٩ - ١ - ٢)$$

**نتيجة (٢)**

**إذا كانت $أ_1$ ، $أ_2$ ، . . . . . . ، $أ_ن$ حوادث شاملة ومتنافية فإن**

$$ح (أ_1 \cup أ_2 \cup \ldots\ldots \cup أ_ن) = ح (أ_1) + ح (أ_2) + \ldots\ldots + ح (أ_ن)$$
$$= ١ \qquad (١٠ - ١ - ٢)$$

**نتيجة (٣)**

إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ....... ، $أ_ن$ حوادث شاملة ومتنافية ومتماثلة فإن

$$ح(أ_١) = ح(أ_٢) = ....... = ح(أ_ن) = \frac{١}{ن} \qquad (٢ - ١ - ١١)$$

**نتيجة (٤)**

إذا رمزنا لحادث معين بالرمز أ وعدمه بالرمز $\overline{أ}$ فإن $\overline{أ}$ تسمى الحادث المكمل Complementary Event والحادثين أ ، $\overline{أ}$ شاملان ومتنافيان. أي أن

$$ح(أ \cup \overline{أ}) = ح(أ) + ح(\overline{أ}) = ١ \qquad (٢ - ١ - ١٢)$$

**ثانياً قانون ضرب الاحتمالات Multiplication of Probabilities**

إذا كان لدينا حادثان $أ_١$ ، $أ_٢$ فإن إحتمال وقوعهما معاً $ح(أ_١ \cap أ_٢)$ يكتب على النحو التالي:

$$ح(أ_١ \cap أ_٢) = ح(أ_١) ح(أ_٢ / أ_١)$$

$$= ح(أ_٢) ح(أ_١ / أ_٢) \qquad (٢ - ١ - ١٣)$$

وإذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ حادثين مستقلين فإن

$$ح(أ_١ \cap أ_٢) = ح(أ_١) ح(أ_٢) \qquad (٢ - ١ - ١٤)$$

وبشكل عام إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ....... $أ_ن$ مجموعة من الحوادث المستقلة فإن

$$ح(أ_١ \cap أ_٢ \cap ....... \cap أ_ن) = ح(أ_١) ح(أ_٢) ....... ح(أ_ن) \qquad (٢ - ١ - ١٥)$$

أي أن احتمال حاصل الضرب يساوي حاصل ضرب الإحتمالات، ويسمى هذا قانون ضرب الاحتمالات.

## تمارين محلولة (مجموعة ١ ـ ٢):

**تمرين (١)**

إذا رمينا زهرة طاولة، ما هو إحتمال الحصول على رقم يقبل القسمة على ٣؟

**الحـل:**

الأرقام التي تقبل القسمة على ٣ في زهرة الطاولة هي ٣ ، ٦ وحيث أن النتائج الممكنة عددها ٦، فإن

$$ح\ (الحصول\ على\ ٣\ أو\ ٦) = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

**تمرين (٢):**

إذا رمينا زهرتي طاولة معاً، ما هو احتمال الحصول على مجموع ٦؟

**الحـل:**

الحصول على مجموع ٦ معناه الحصول على (١ ، ٥) أو (٥ ، ١) أو (٢ ، ٤) أو (٤ ، ٢) أو (٣ ، ٣) وعدد هذه النتائج ٥. وبما أن عدد النتائج المواتية هو ٣٦ فإن

$$ح\ (الحصول\ على\ مجموع\ ٦) = \frac{٥}{٣٦}$$

**تمرين (٣):**

إذا علم أن احتمال وجود عيب في النسيج الذي يستخدمه مصنع للقمصان هو ٥٪ واحتمال وجود عيب فيه ناشيء من الصباغة هو ٤٪. فإذا كانت العمليتان الانتاجيتان مستقلتين، أوجد احتمال انتاج قميص معيب (أي به عيب أو أكثر من العيوب المذكورة).

**الحـل:**

إذا رمزنا لحادث وجود عيب في النسيج بالرمز $أ_١$ وحادث وجود عيب ناتج عن الصباغة بالرمز $أ_٢$، فإنه باستخدام المعادلتين (٤ ـ ١ ـ ٢) ، (١٤ ـ ١ ـ ٢)

نجد أن

$$ح(أ_1 \cup أ_2) = ٠,٠٥ + ٠,٠٤ - ٠,٠٥ \times ٠,٠٤$$

$$= ٠,٠٨٨$$

تمرين (٤):

إذا كانت التقديرات التالية لدى مدير التخطيط في مصنع معين:

- احتمال أن يتم استلام المعدات اللازمة لمشروع معين في الموعد المتفق عليه = ٨٠٪
- احتمال أن ينتهي العمل في المشروع في موعده المحدد = ٦٤٪
- احتمال أن يتم استلام المعدات اللازمة للمشروع في الموعد المتفق عليه وأن ينتهي العمل في المشروع في موعده المحدد = ٦٠٪.

واعتماداً على التقديرات السابقة، المطلوب تحديد:

١ - احتمال انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا سلّمت المعدات في الموعد المتفق عليه.

٢ - احتمال عدم انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا لم تسلّم المعدات في الموعد المتفق عليه.

الحـل:

إذا رمزنا لحادث استلام المعدات اللازمة للمشروع بالرمز $أ_1$ والحادث المكمل له بالرمز $\overline{أ}_1$، وحادث انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد بالرمز $أ_2$ والحادث المكمل له بالرمز $\overline{أ}_2$ فإن:

١ - احتمال إنتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا سلّمت المعدّات في الموعد المتفق عليه $ح(أ_2 / أ_1)$ يحسب باستخدام (١٣ - ١ - ٢) على النحو التالي:

$$ح(أ_2 / أ_1) = \frac{ح(أ_1 \cap أ_2)}{ح(أ_1)} = \frac{٠,٦٠}{٠,٨٠} = ٠,٧٥$$

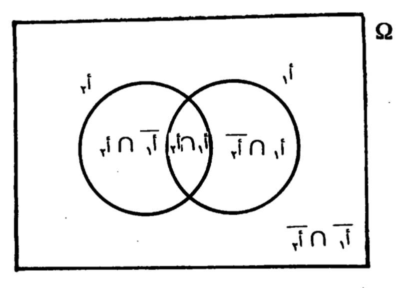
٢ - احتمال عدم انتهاء العمل في المشروع في موعده المحدد إذا لم تسلّم المعدات في الموعد المتفق عليه $(ح(\overline{أ}_2 / \overline{أ}_1)$ باستخدام (١٣ - ١ - ٢) كما يلي:

$$ح(\overline{أ}_2 / \overline{أ}_1) = \frac{ح(\overline{أ}_1 \cap \overline{أ}_2)}{ح(\overline{أ}_1)}$$

حيث:

ح ($\overline{أ_1}$) = ١ - ح ($أ_1$) = ١ - ٠,٨٠ = ٠,٢٠

أما ح ($\overline{أ_2}$ ∩ $\overline{أ_1}$) فيمكن حسابه باستخدام أشكال فين كما يلي




(شكل (١ - ١ - ٢)

حيث Ω ترمز لفراغ المعاينة Sampling Space

من المعلوم أن:

ح (Ω) = ح ($أ_1 \cap أ_2$) ∪ ($\overline{أ_1} \cap أ_2$) ∪ ($أ_1 \cap \overline{أ_2}$) ∪ ($\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}$) = ١

وبما أن $أ_1 \cap أ_2$ ، $\overline{أ_1} \cap أ_2$ ، $أ_1 \cap \overline{أ_2}$ ، $\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}$ احداثاً متنافية كما أن

ح { ($أ_1 \cap أ_2$) ∪ ($أ_1 \cap \overline{أ_2}$) ∪ ($\overline{أ_1} \cap أ_2$) } = ح ($أ_1 \cup أ_2$)

وباستخدام (٤ - ١ - ٢) فإن:

ح ($أ_1 \cup أ_2$) = ٠,٠٨٠ + ٠,٦٤ - ٠,٦٠ = ٠,٨٤

و ح ($\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}$) = ١ - ٠,٨٤ = ٠,١٦

∴ ح ($\overline{أ_2}$ / $\overline{أ_1}$) = $\frac{٠,١٦}{٠,٢٠}$ = ٠,٨٠

**تمرين (٥):**

في دراسة عن الإنفاق الاستهلاكي على السجاير للسكان البالغين في مدينة معينة أمكن الحصول على المعلومات التالية:

| الانفاق الشهري على السجاير (بالدينار) | العـــدد | |
|---|---|---|
| | ذكــور | إنــاث |
| صفر (لا يدخن) | ١٠٠٠ | ٤٠٠٠ |
| دينار وأقل من ثلاثة | ٢٠٠٠ | ٣٠٠٠ |
| ثلاثة دنانير وأقل من خمسة | ٥٠٠٠ | ٢٠٠٠ |
| خمسة دنانير فأكثر | ٢٠٠٠ | ١٠٠٠ |
| المجمـــوع | ١٠٠٠٠ | ١٠٠٠٠ |

إذا اخترنا مفردة (ذكر أو أنثى) عشوائياً من بين الذين شملتهم الدراسة:

١ ـ ما احتمال أن تكون هذه المفردة ممن يدخنون؟

٢ ـ إذا علمنا أن هذه المفردة ممن يدخنون، ما احتمال أن تكون من الذكور؟

٣ ـ إذا علمنا أن هذه المفردة من الإناث، ما احتمال أن تكـون ممن ينفق خمسة دنـانير فأكثر شهرياً على السجاير؟

٤ ـ إذا علمنا أن هذه المفردة من الإناث المـدخنات، مـا احتمال أن تكـون ممن ينفقن ثلاثة دنانير فأكثر شهرياً على السجاير؟

الحـــل:

إذا رمـزنا لحـادث أن تكون المفـردة المختارة عشـوائياً من المـدخنين بـالـرمـز $أ_١$ ولحـادث أن تكون من الـذكور بـالرمـز $أ_٢$ ولحادث أن تكـون من الإنـاث بـالـرمـز $أ_٣$ ولحادث أن تكون ممن ينفقن خمسة دنانير فأكثر شهرياً على السجاير بـالرمـز $أ_٤$ ولحادث أن تكون من الإناث المدخنات بالرمز $أ_٥$ ولحادث أن تكون ممن ينفقن ثلاثة دنانير فأكثر شهريا على السجاير بالرمز $أ_٦$ فإن:

١ ـ بتطبيق (١ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ_١) = \frac{١٥٠٠٠}{٢٠٠٠٠} = ٠,٧٥$$

٢ ـ بتطبيق (١٣ ـ ١ ـ ٢):

$$ح(أ_٢ / أ_١) = \frac{٢٠٠٠ + ٥٠٠٠ + ٢٠٠٠}{٢٠٠٠٠} \div \frac{١٥٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$$

$$= \frac{٩٠٠٠}{١٥٠٠٠} = ٠,٦٠$$

٣ ـ بتطبيق (١٣ ـ ١ ـ ٢):

$$ح\,(أ_{٤}\ /\ أ_{٣}) = \frac{١٠٠٠}{٢٠٠٠٠} \div \frac{١٠٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$$

$$= \frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} = ٠,١٠$$

٤ ـ بتطبيق (١٣ ـ ١ ـ ٢):

$$ح\,(أ_{٦}\ /\ أ_{٥}) = \frac{١٠٠٠ + ٢٠٠٠}{٢٠٠٠٠} \div \frac{١٠٠٠ + ٢٠٠٠ + ٣٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$$

$$= \frac{٣٠٠٠}{٦٠٠٠} = ٠,٥٠$$

**تمرين (٦):**

الجدول التالي يبيِّن التقديرات التي حصل عليها ٢٠٠ طالب في اختبارين:

| الاختبار الأول / الاختبار الثاني | ضعيف | مقبول | جيد | جيد جداً | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|
| ضعيف | ٤ | ٦ | | | ١٠ |
| مقبول | ١٠ | ٥٤ | ١٤ | ٢ | ٨٠ |
| جيد | ٦ | ٢٠ | ٤٠ | ٤ | ٧٠ |
| جيد جداً | | ١٠ | ١٦ | ١٤ | ٤٠ |
| المجموع | ٢٠ | ٩٠ | ٧٠ | ٢٠ | ٢٠٠ |

فإذا اخترنا عشوائياً أحد طلبة هذه المجموعة، أوجد:

١ ـ احتمال أن يكون تقديره في الاختبار الثاني هو مقبول.

٢ ـ احتمال أن يكون تقديره في الاختبار الثاني هو مقبول إذا علم أن تقديره في الاختبار الأول مقبول.

٣ ـ احتمال أن يكون الطالب قد حصل على نفس التقدير في الاختبارين.
٤ ـ احتمال أن يكون قد نجح في الاختبار الثاني علماً بأنه كان راسباً في الاختبار الأول.
٥ ـ احتمال أن يكون تقدير الطالب في الاختبار الثاني أعلى من تقديره في الاختبار الأول.
٦ ـ احتمال أن يكون قد حصّل تقدير جيد جداً في واحد على الأقل من الاختبارين.

الحـــل:

١ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هو مقبول بالرمز أ فإنه باستخدام (١ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ) = \frac{٨٠}{٢٠٠} = ٠,٤٠$$

٢ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هو مقبول بالرمز $أ_١$، وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الأول هو مقبول بالرمز $أ_٢$ فإنه باستخدام (١٣ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ_١ / أ_٢) = \frac{٥٤}{٢٠٠} \div \frac{٩٠}{٢٠٠} = \frac{٥٤}{٩٠} = ٠,٦٠$$

٣ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو ضعيف بالرمز $أ_١$، وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو مقبول بالرمز $أ_٢$ وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو جيد بالرمز $أ_٣$، وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبارين هو جيد جداً بالرمز $أ_٤$، وحيث أن $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$، $أ_٤$ حوادث متنافية فإنه باستخدام (١٨ ـ ١ ـ ٢) نجد أن:

$$ح(أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ \cup أ_٤) = \frac{٤}{٢٠٠} + \frac{٥٤}{٢٠٠} + \frac{٤٠}{٢٠٠} + \frac{١٤}{٢٠٠} = \frac{١١٢}{٢٠٠}$$

$$= ٠,٥٦$$

٤ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب ناجح في الاختبار الثاني بالرمز $أ_١$ وحادث الحصول على طالب راسب في الاختبار الأول بالرمز $أ_٢$ فإنه باستخدام (١٣ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ_1 / أ_2) = \frac{١٠ + ٦}{٢٠٠} \div \frac{٤ + ١٠ + ٦}{٢٠٠}$$

$$= \frac{١٦}{٢٠} = ٠,٨٠$$

٥ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني أعلى من تقديره في الاختبار الأول بالرمز أ فإنه باستخدام (١ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ_1) = \frac{١٠ + ٦ + ٢٠ + ١٠ + ١٦}{٢٠٠} = \frac{٦٢}{٢٠٠}$$

$$= ٠,٣١$$

٦ ـ إذا رمزنا لحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الأول هو جيد جداً بالرمز $أ_1$ وحادث الحصول على طالب تقديره في الاختبار الثاني هو جيد جداً بالرمز $أ_2$ فإنه باستخدام (٤ ـ ١ ـ ٢)

$$ح(أ_1 \cup أ_2) = \frac{٢٠}{٢٠٠} + \frac{٤٠}{٢٠٠} - \frac{١٤}{٢٠٠} = \frac{٤٦}{٢٠٠}$$

$$= ٠,٢٣$$



# الفصل الثاني

## نظرية بيز Bayes' Theorem

أُطلق على هذه النظرية إسم بيز نسبة ألى مكتشفها العالم تـوماس بيـز Thomas Bayes والـذي عـاش في الفـترة ١٧٠٢-١٧٦١ ونشرت في بحث علمي قصـير عـام ١٩٦٣ ، وتعنى هـذه النظريـة أساسـاً بحسـاب الاحتـمالات الشرطيـة ويمكن وضعهـا بصورة جبرية مبسطة على النحو التالي:

إذا كـان لدينـا حادث ب ومجمـوعة من الحـوادث الشـاملة والمتنـافيـة أ$_{١}$، أ$_{٢}$، . . . . ، أ$_{ن}$ وكان وقوع الحادث ب لا بد وأن يكـون مصحوبـاً بوقـوع أحد الحـوادث أ$_{١}$، أ$_{٢}$، . . . . ، أ$_{ن}$ فإن ب $\cap$ أ$_{١}$، ب $\cap$ أ$_{٢}$، . . . . ، ب $\cap$ أ$_{ن}$ حوادث متنـافية وبتـطبيق (٨ ـ ١ ـ ١) فـإن

ح(ب) = ح (ب $\cap$ أ$_{١}$) $\cup$ (ب $\cap$ أ$_{٢}$) $\cup$ . . . . . $\cup$ (ب $\cap$ أ$_{ن}$)

= ح (ب $\cap$ أ$_{١}$) + ح (ب $\cap$ أ$_{٢}$) + . . . . + ح (ب $\cap$ أ$_{ن}$) (١٦ ـ ٢ ـ ٢)

وبتطبيق قانون الاحتمال الشرطي (١٣ ـ ١ ـ ١) فإن (١٦ ـ ٢ ـ ٢) تؤول إلى

ح (ب) = ح (أ$_{١}$) ح (ب/أ$_{١}$) + ح (أ$_{٢}$) ح (ب/أ$_{٢}$) + . . . .
+ ح (أ$_{ن}$) ح (ب/أ$_{ن}$)

= مجـ$_{ر=١}^{ن}$ ح (أ$_{ر}$) ح (ب/أ$_{ر}$) ، ر = ١، ٢، . . . . ، ن (١٧ ـ ٢ ـ ٢)

والمطلوب الآن هو إيجـاد ح (أ$_{ر}$/ب)، وباستخـدام قـانـون الاحتـمال الشرطي (١٣ ـ ١ ـ ١) فإن

$$\text{ح (أ}_{\text{ر}}\text{/ب)} = \frac{\text{ح (أ}_{\text{ر}} \cap \text{ ب)}}{\text{ح (ب)}} \qquad (١٨ ـ ٢ ـ ٢)$$

وباستخدام (١٣ ـ ١ ـ ١) مرة أخرى والتعويض من (١٨ ـ ٢ ـ ٢) نجد أن

$$\text{ح (أر/ب)} = \frac{\text{ح (أر) ح (ب/أر)}}{\text{مجـ}_{ر=١}^{ن} \text{ ح (أر) ح (ب/أر)}} \qquad (١٩ ـ ٢ ـ ٢)$$

ويمكن كتابة (١٩ ـ ٢ ـ ٢) على النحو التالي

$$\text{ح (أر/ب)} \propto \text{ح (أر) ح (ب / أر)} \qquad (٢٠ ـ ٢ ـ ٢)$$

فإذا فرضنا أن ب تمثل مجموعة من البيانات الميدانية أو التجريبية، فإن إحتمال وقوع الحادث أر في ضوء هذه البيانات والذي تم الوصول إليه عن طريق نظرية بيز يسمى الاحتمال البعدي Posterior Probability أما إحتمال وقوع الحادث أر قبل اللجوء إلى هذه النظرية فإنه يسمى الاحتمال القبلي Prior Probability

ومما تجدر الإشارة إليه أن هذه النظرية تعنى بالاحتمالات الشرطية من الناحية الشكلية فقط، ففي حين أن الاحتمال الشرطي بمفهومه المعتاد يعطي إحتمال الحصول على عينة ما أو نتيجة تجربة معينة إذا علمت قيمة ثابت المجتمع أو حالة الطبيعة فإن نظرية بيز تعطى إحتمال الحصول على قيمة ما لثابت المجتمع أو حالة معينة للطبيعة في ضوء بيانات العينة أو نتيجة التجربة. وسوف نوضح هذه النظرية باستخدام Tree Diagram الذي نعرضه بعد التمرين التوضيحي التالي:

**تمرين توضيحي**

إذا فرضنا أن مصنعاً به أربع الات تنتج من سلعة ما المقادير التالية:

| الالة | الانتاج اليومي بالوحدة |
|---|---|
| ١ | ١٠٠٠ |
| ٢ | ١٢٠٠ |
| ٣ | ١٨٠٠ |
| ٤ | ٢٠٠٠ |
| المجموع | ٦٠٠٠ |

وإذا فرضنا أن نسبة المعيب من إنتاج الآلات الأربع هي كما يلي:

| الآلة | نسبة المعيب من إنتاج الآلة |
|---|---|
| ١ | ٠,٠١ |
| ٢ | ٠,٠٥ |
| ٣ | ٠,٠٠٥ |
| ٤ | ٠,٠١ |

وجمع إنتاج المصنع في نهاية يوم العمل واختيرت وحدة من هذا الانتاج عشوائياً، أوجد:

١ ـ احتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة

٢ ـ إحتمال أن تكون هذه الوحدة من أنتاج الآلة الأولى إذا علم أنها معيبة.

الحل

أفرض أن: ب هو حادث الحصول على وحدة معيبة

$أ_١$ هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الأولى

$أ_٢$ هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الثانية

$أ_٣$ هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الثالثة

$أ_٤$ هو حادث الحصول على وحدة من إنتاج الآلة الرابعة

وبناء على المعلومات المعطاة وبتطبيع (١ ـ ١ ـ ٢) فإن

$$ح (أ_١) = \frac{١٠٠٠}{٦٠٠٠} = \frac{١}{٦} \quad ، \quad ح (أ_٢) = \frac{١٢٠٠}{٦٠٠٠} = \frac{١}{٥}$$

$$ح (أ_٣) = \frac{١٨٠٠}{٦٠٠٠} = \frac{٣}{١٠} \quad ، \quad ح (أ_٤) = \frac{٢٠٠٠}{٦٠٠٠} = \frac{١}{٣}$$

وبتطبيق (١٣ ـ ١ ـ ٢) وبناء على المعلومات المعطاة فإن:

$$ح (ب/أ_١) = ٠,٠١ \text{ ، } ح (ب/أ_٢) = ٠,٠٥$$

$$ح ب/أ_٣) = ٠,٠٠٥ \text{ ، } ح (ب/أ_٤) = ٠,٠١$$

وبالتعويض في (١٧ ـ ٢ ـ ٢) نجد أن

$$ح (ب) = \frac{١}{٦} \times ٠,٠١ + \frac{١}{٥} \times ٠,٠٥ + \frac{٣}{١٠} \times ٠,٠٠٥ + \frac{١}{٣} \times ٠,٠١$$

$$= ٠,٠١٦٥$$

وبالتعويض في (١٩ ـ ٢ ـ ٢) فإن

ح (أ١/ب)

$$\frac{٠,٠١ \times \frac{١}{٦}}{٠,٠١ \times \frac{١}{٣} + ٠,٠٠٥ \times \frac{٣}{١٠} + ٠,٠٥ \times \frac{١}{٥} + ٠,٠١ \times \frac{١}{٦}} =$$

$$\frac{١٠}{٩٩} = \frac{٠,٠١ \times \frac{١}{٦}}{٠,٠١٦٥} =$$

# الفصل الثالث

## شجرة القرارات Tree Diagram

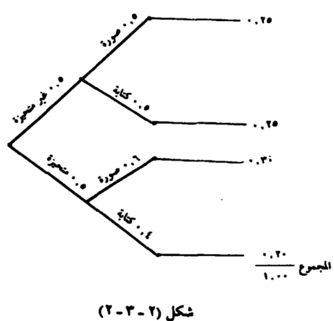
تستخدم هذه الأشكال للمساعـدة في فهم وحل بعض المسـائل الاحتـمالية مثـل نظرية بيز واتخاذ القرارات والقيمة المتوقعة. والأمثلة التالية توضح كيفية استخدام هذه الأشكال.

**مثـال ١ :**

إذا كان لدينا قطعتا نقود واحـدة منهما غـير متحيزة، والثـانية متحيـزة بحيث أن نسبـة عدد مـرات ظهور الصـورة هو ٠,٦٠، واختـرنـا عشـوائيـاً واحـدة من هـاتـين القطعتين، وأجرينا تجربة برمي هذه القطعة، فما هو إحتمال أن تكون القـطعة المختـارة هي المتحيزة إذا حصلنا على صورة نتيجة إجراء التجربة؟

**الحل**

يمكن الوصول إلى الحل باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:




شكل (٢ - ٣ - ٢)

∴ احتمال أن تكون قطعة النقود المختارة هي المتحيزة إذا ظهرت صورة عند إجراء التجربة من الشكل (٢ ـ ٣ ـ ٢) وباستخدام نظرية بيز (١٩ ـ ٢ ـ ٢)

$$\text{ح (متحيزة | صورة)} = \frac{\text{ح (متحيزة} \cap \text{صورة)}}{\text{ح (صورة)}}$$

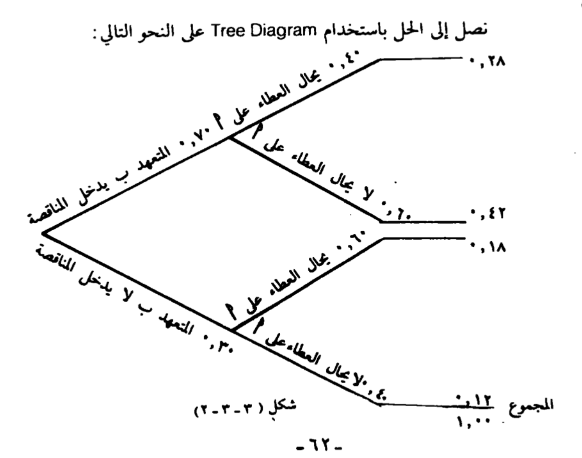
$$= \frac{٠,٣٠}{٠,٣٠ + ٠,٢٥} = \frac{٦}{١١}$$

**مثال ٢**

إذا أراد متعهد أ الدخول في مناقصة لإنشاء مشروع ودلّت الخبرة السابقة أن متعهداً آخر ب يدخل في مناقصة ٧٠٪ من المشاريع التي تماثل المشروع الحالي. وإذا دخل ب المناقصة فإن إحتمال أن يُحال العطاء على المتعهد أ يساوي ٤٠٪، وإذا لم يدخل ب في المناقصة فإن إحتمال أن يُحال العطاء على المتعهد أ يرتفع إلى ٦٠٪ (حيث أن هناك دائماً متعهدين آخرين يدخلون في المناقصة). فإذا دخل أ في هذه المناقصة وأُحيل العطاء عليه ولم يعلم مقدماً ما إذا كان ب قد دخل فيها، فما هو إحتمال أن يكون ب قد دخل في هذه المناقصة؟

**الحل**

نصل إلى الحل باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:




شكل (٣ ـ ٣ ـ ٢)

∴ إحتمال أن يكون ب قد دخل في المناقصة أذا أحيل العطاء على أ من الشكل (٣ ـ ٣ ـ ٢) وباستخدام نظرية بيز (١٩ ـ ٢ ـ ٢)

ح (ب دخل في المناقصة | أحيل العطاء على أ)

$$= \frac{\text{ح (ب دخل في المناقصة} \cap \text{أحيل العطاء على أ)}}{\text{ح (أحيل العطاء على أ)}}$$

$$= \frac{٠,٢٨}{٠,١٨ + ٠,٢٨} = \frac{١٤}{٢٣}$$

**مثال ٣**

يوجد سبع الات حاسبة في مخزن معين، ثلاث منها صالحة، واثنتان فيهما خلل بسيط واثنتان فيهما خلل كبير. إختار شخص آلتين منها بالتتالى وبدون إعادة وأخذهما إلى المكتب، ما هو إحتمال أن تكون واحدة منهما فقط فيها خلل كبير؟

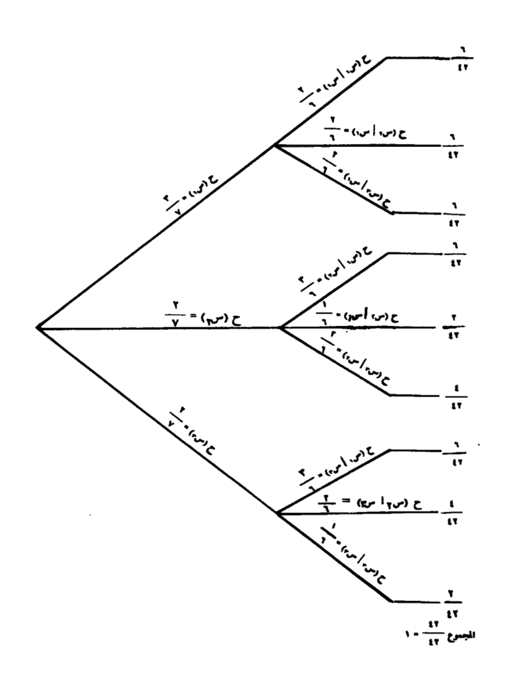
**الحل**

سوف نرمز للآلة الصالحة بالرمز $س_١$

والآلة التي فيها خلل بسيط بالرمز $س_٢$

والآلة التي فيها خلل كبير بالرمز $س_٣$

ونحسب الاحتمال المطلوب باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:




شكل (٤ - ٢ - ٢)

وباستخدام شكل (٤ ـ ٣ ـ ٢) فإن

ح (أن تكون آلة واحدة فقط فيها خلل كبير) =

ح (س٣ | س١) + ح (س٣ | س٢) + ح (س١ | س٣) + ح (س٢ | س٣)

$$= \frac{٦}{٤٢} + \frac{٤}{٤٢} + \frac{٦}{٤٢} + \frac{٤}{٤٢} = \frac{١٠}{٢١}$$

كما أنه يمكن حساب الأحتمال المطلوب باستخدام توزيع الهايبرجيومترك الذي ندرسه في الباب الرابع من هذا الكتاب.

**مثال ٤**

بائع يزور زبوناً للمرة الأولى ويبيعه صفر أو ١ أو ٢ أو ٣ وحدات من سلعة ما باحتمالات ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٣ ، ٠,٤ ، على التوالي. ويقوم البائع بزيارة الزبون مرة ثانية إذا كانت مبيعاته له في المرة الأولى صفر أو ١ أو ٢ . والزبون الذي يشتري وحدتين في المرة الأولى فإنه يشتري ١ أو صفر في المرة الثانية باحتمالات ٠,٤ ، ٠,٦ على التوالي، والزبون الذي يشتري وحدة واحدة في المرة الاولى يشتري ٢ أو ١ أو صفر في المرة الثانية باحتمالات ٠,٢ ، ٠,٣ ، ٠,٥ على التوالي، وأخيراً الزبون الذي لا يشتري شيئاً في المرة الأولى يشتري ٣ أو ٢ أو ١ أو صفر في المرة الثانية باحتمالات ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٣ ، ٠,٤ ، على التوالي.

أوجد القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد.

**الحل**

يمكن حساب القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد باستخدام Tree Diagram على النحو التالي:

| عدد الوحدات | الزيارة الأولى | الزيارة الثانية | س | ح (س) | س×ح (س) |
|---|---|---|---|---|---|
| ٣ | يبيع ٣، ح (٣) = ٠,٤ | لا شيء | ٣ | ٠,٤٠ | ١,٢٠ |
| ٢ | يبيع ٢، ح (٢) = ٠,٣ | يبيع ١، ح (١) = ٠,٤ | ٣ | ٠,١٢ | ٠,٣٦ |
| | | يبيع صفر، ح (صفر) = ٠,٦ | ٢ | ٠,١٨ | ٠,٣٦ |
| ١ | يبيع ١، ح (١) = ٠,٢ | يبيع ٢، ح (٢) = ٠,٢ | ٣ | ٠,٠٤ | ٠,١٢ |
| | | يبيع ١، ح (١) = ٠,٣ | ٢ | ٠,٠٦ | ٠,١٢ |
| | | يبيع صفر، ح (صفر) = ٠,٥ | ١ | ٠,١٠ | ٠,١٠ |
| صفر | يبيع (صفر)، ح (صفر) = ٠,١ | يبيع ٣، ح (٣) = ٠,١ | ٣ | ٠,٠١ | ٠,٠٣ |
| | | يبيع ٢، ح (٢) = ٠,٢ | ٣ | ٠,٠٢ | ٠,٠٤ |
| | | يبيع ١، ح (١) = ٠,٣ | ١ | ٠,٠٣ | ٠,٠٣ |
| | | يبيع صفر، ح (صفر) = ٠,٤ | ضفر | ٠,٠٤ | صفر |
| المجموع | | | | ١,٠٠ | ٢,٣٦ |

شكل (٥ ـ ٣ ـ ٢)

من الشكل (٥ ـ ٣ ـ ٢) يتضح أن القيمة المتوقعة لعدد الوحدات المباعة للزبون الواحد يساوي ٢,٣٦.

# الفصل الرابع

## اتخاذ القرارات في ظروف المخاطرة

## Decision Making Under Risk

يعتبر اتخاذ القرارات في ظروف المخاطرة تطبيقاً مباشراً لمبادىء الاحتمالات وتوضيحاً لفكرة القيمة المتوقعة Expected Value

وسوف نقوم بحل هذه المشكلة بالطرق التالية:

١ - جدول الأرباح المشروطة Conditional Profit Table

٢ - جدول الخسائر المشروطة Conditional Loss Table

٣ - التحليل الحدي Marginal Analysis

**تمرين توضيحي**

الجدول التكراري النسبي التالي يبيّن احتمالات الطلب على احدى السلع الموسمية.

| الطلب بالوحـــدة | الاحتمال أو التكرار النسبي |
|---|---|
| ١٠٠ | ٠,١ |
| ٢٠٠ | ٠,٢ |
| ٣٠٠ | ٠,٣ |
| ٤٠٠ | ٠,٢ |
| ٥٠٠ | ٠,٢ |
| المجموع | ١,٠ |

والربح المتحقق من بيع الوحدة الواحدة في الموسم يساوي ١٠ دنانير والخسارة في كل وحدة لا تباع في الموسم تساوي ٥ دنانير، فما هي أفضل خطة يتبعها المنتج

لتحقيق أكبر ربح ممكن في حالة المخاطرة؟

الحـــل

**أولاً** جدول الأرباح المشروطة

| حالات الطلب | ١٠٠ | ٢٠٠ | ٣٠٠ | ٤٠٠ | ٥٠٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| الاحتمال | ٠,١ | ٠,٢ | ٠,٣ | ٠,٢ | ٠,٢ |
| البدائل | | | | | |
| ١٠٠ | ١٠٠٠ | ١٠٠٠ | ١٠٠٠ | ١٠٠٠ | ١٠٠٠ |
| ٢٠٠ | ٥٠٠ | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٠ |
| ٣٠٠ | صفر | ١٥٠٠ | ٣٠٠٠ | ٣٠٠٠ | ٣٠٠٠ |
| ٤٠٠ | ٥٠٠- | ١٠٠٠ | ٢٥٠٠ | ٤٠٠٠ | ٤٠٠٠ |
| ٥٠٠ | ١٠٠٠- | ٥٠٠ | ٢٠٠٠ | ٣٥٠٠ | ٥٠٠٠ |

وأي عنصر في هذه المصفوفة يمثل الربح المتحقق عند تقاطع بديل معين أو استراتيجية معينة (صف) مع مستوى معين للطلب (عمود)، فمثلاً العنصر الواقع عند تقاطع البديل ٢٠٠ (الصف الثاني) ومستوى الطلب ١٠٠ (العمود الأول) عبارة عن الربح المتحقق نتيجة بيع ١٠٠ وحدة مطروحاً منه مقدار الخسارة المتحقق نتيجة بقاء ١٠٠ وحدة دون بيع في الموسم، أي ١٠٠ × ١٠ - ١٠٠ × ٥ = ٥٠٠

والأرباح المتوقعة للبدائل المختلفة تحسب كما يلي:

البديل ١٠٠ : ١٠٠٠ × ٠,١ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ١٠٠٠ × ٠,٣ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ١٠٠٠ × ٠,٢ = ١٠٠٠

البديل ٢٠٠ : ٥٠٠ × ٠,١ + ٢٠٠٠ × ٠,٢ + ٢٠٠٠ × ٠,٣ + ٢٠٠٠ × ٠,٢ + ٢٠٠٠ × ٠,٢ = ١٨٥٠

البديل ٣٠٠ : صفر × ٠,١ + ١٥٠٠ × ٠,٢ + ٣٠٠٠ × ٠,٣ + ٣٠٠٠ × ٠,٢ + ٣٠٠٠ × ٠,٢ = ٢٤٠٠

البديل ٤٠٠ : ٥٠٠- × ٠,١ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ٢٥٠٠ × ٠,٣ + ٤٠٠٠ × ٠,٢ + ٤٠٠٠ × ٠,٢ = ٢٥٠٠

البديل ٥٠٠ : ١٠٠٠- × ٠,١ + ٥٠٠ × ٠,٢ + ٢٠٠٠ × ٠,٣ + ٣٥٠٠ × ٠,٢ + ٥٠٠٠ × ٠,٢ = ٢٣٠٠

وأكبر ربح متوقع هو بانتاج ٤٠٠ وحدة، حيث يكون الربح المتوقع ٢٥٠٠ ديناراً.

وتحسب قيمة المعلومات الكاملة The Expected Value of Perfect Information على النحو التالي:

قيمة المعلومات الكاملة = الربح المتوقع في حالة التأكد ـ الربح المتوقع في حالة المخاطرة، والربح المتوقع في حالة التأكد نحصل عليه بضرب كل قيمة على قطر المصفوفة بالاحتمال المقابل، أي أن

الربح المتوقع في حالة التأكد = ١٠٠٠ × ٠,١ + ٢٠٠٠ × ٠,٢ +
٣٠٠٠ × ٠,٣ + ٤٠٠٠ × ٠,٢ +
٥٠٠٠ × ٠,٢
= ٣٢٠٠

∴ قيمة المعلومات الكاملة = ٣٢٠٠ - ٢٥٠٠ = ٧٠٠ دينار

ثانياً جدول الخسائر المشروطة

تقسم الخسائر إلى نوعين

١ ـ خسائر التقادم وهي التي تحدث عندما تكون الكمية المنتجة أو المخزونة (البديل) أكبر من حجم الطلب في السوق وتحسب لكل صف عند تثبيت حجم الطلب (العمود).

٢ ـ خسائر الفرص المضاعة وهي تحدث عندما تكون الكمية المنتجة أو المخزونة (البديل) أقل من حجم الطلب في السوق وتحسب لكل عمود عند تثبيت البديل (الصف).

والنتائج مبينة في الجدول التالي:

## خسائر الفرص المضاعة

| | | ١٠٠ | ٢٠٠ | ٣٠٠ | ٤٠٠ | ٥٠٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | حالات الطلب | ١٠٠ | ٢٠٠ | ٣٠٠ | ٤٠٠ | ٥٠٠ |
| | الاحتمال البدائل | ٠,١ | ٠,٢ | ٠,٣ | ٠,٢ | ٠,٢ |
| خسائر التقادم | ١٠٠ | صفر | ١٠٠٠ | ٢٠٠٠ | ٣٠٠٠ | ٤٠٠٠ |
| | ٢٠٠ | ٥٠٠ | صفر | ١٠٠٠ | ٢٠٠٠ | ٣٠٠٠ |
| | ٣٠٠ | ١٠٠٠ | ٥٠٠ | صفر | ١٠٠٠ | ٢٠٠٠ |
| | ٤٠٠ | ١٥٠٠ | ١٠٠٠ | ٥٠٠ | صفر | ١٠٠٠ |
| | ٥٠٠ | ٢٠٠٠ | ١٥٠٠ | ١٠٠٠ | ٥٠٠ | صفر |

وعناصر هذه المصفوفة تمثل اما خسائر الفرص المضاعة أو خسائر التقادم، فمثلاً العنصر عند تقاطع البديل ٣٠٠ (الصف الثالث) مع حالة الطلب ١٠٠ (العمود الأول) يمثل الخسارة التي تتحقق نتيجة بقاء ٢٠٠ في المخزن دون بيع وبالتالي اضطرار التاجر لبيعها خارج الموسم بخسارة مقدارها ١٠٠٠ دينار، أما العنصر عند تقاطع البديل ٢٠٠ (الصف الثاني) مع حالة الطلب ٤٠٠ (العمود الرابع) فهو عبارة عن الربح الذي كان من الممكن أن يتحقق عند انتاج أو تخزين ٤٠٠ وحدة بدلاً من ٢٠٠ وبالتالي ضاعت فرصة بيع ٢٠٠ وحدة أخرى من السلعة في الموسم كان يمكن أن تحقق ربحاً مقداره ٢٠٠٠.

والقيمة المتوقعة للخسارة عند كل بديل تحسب على النحو التالي:

البديل ١٠٠ : صفر × ٠,١ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ٢٠٠٠ × ٠,٣ + ٣٠٠٠ × ٠,٢ + ٤٠٠٠ × ٠,٢
= ٢٢٠٠

البديل ٢٠٠ : ٥٠٠ × ٠,١ + صفر × ٠,٢ + ١٠٠٠ × ٠,٣ + ٢٠٠٠ × ٠,٢ + ٣٠٠٠ × ٠,٢
= ١٣٥٠

البديل ٣٠٠ : ١٠٠٠ × ٠,١ + ٥٠٠ × ٠,٢ + صفر × ٠,٣ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ٢٠٠٠ × ٠,٢
= ٨٠٠

البديل ٤٠٠ : ١٥٠٠ × ٠,١ + ١٠٠٠ × ٠,٢ + ٥٠٠ × ٠,٣ + صفر × ٠,٢ + ١٠٠٠ × ٠,٢
= ٧٠٠

البديل ٥٠٠ : ٢٠٠٠ × ٠,١ + ١٥٠٠ × ٠,٢ + ١٠٠٠ × ٠,٣ + ٥٠٠ × ٠,٢ + صفر × ٠,٢
= ٩٠٠

وأقل خسارة ممكنة هي بانتاج أو تخزين ٤٠٠ وحدة، وهو نفس القرار الذي توصلنا إليه باستخدام جدول الأرباح المشروطة.

· وقيمة المعلومات الكاملة = قيمة الخسارة في حالة المخاطرة ـ قيمة الخسارة في حالة التأكد، وقيمة الخسارة في حالة التأكد = صفر لأنها حاصل ضرب القيم على قطر المصفوفة في جدول الخسائر المشروطة بالاحتمالات المقابلة، وبالتالي فإن قيمة المعلومات الكاملة = ٧٠٠ - صفر = ٧٠٠ وهي أيضاً نفس النتيجة التي توصلنا إليها في جدول الأرباح المشروطة.

**ثالثاً التحليل الحدي**

لقد افترضنا في جدولي الأرباح والخسائر المشروطة أن البدائل أو الاستراتيجيات التي يستخدمها التاجر هي ١٠٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ٤٠٠، ٥٠٠ فقط. وبشكل عام إذا كان أمام التاجر البديل ١٠٠ والبديل ٢٠٠ مثلاً فإنه ليس هناك ما يمنع وجود بديل آخر بين هذين البديلين يمكن استخدامه. ومن هنا تأتي فكرة التحليل الحدي والتي تتلخص فيما يلي:

عند شراء وحدة إضافية من السلعة فهي إما أن تباع أو لا تباع. فإذا كان احتمال بيع الوحدة الحدية هو ح فإن احتمال عدم بيعها هو ١ - ح. وإذا بيعت الوحدة الحدية فإن المنتج أو التاجر يحقق زيادة في أرباحه يطلق عليها الربح الحدي Marginal Profit ونرمز له بالرمز رد وهو عبارة عن الفرق بين ثمن البيع والتكاليف، أي ان رد = ثمن البيع ـ ثمن التكاليف. أما في حالة عدم بيع الوحدة الإضافية فإن الربح ينخفض بمقدار يطلق عليه الخسارة الحدية وسوف نرمز لها بالرمز س د.

ونستخدم في التحليل الحدي القاعدة التوازنية المعروفة في الاقتصاد والتي تنص على أن الكمية المنتجة أو المخزّنة التي تحقق أقصى ربح هي عندما يكون

الربح الحدي المتوقع = الخسارة الحدية المتوقعة

حيث

الربح الحدي المتوقع = الربح الحدي × احتمال بيع الوحدة الحدية

= رد × ح

الخسارة الحدية المتوقعة = الخسارة الحدية × احتمال عدم بيع الوحدة الحدية

= س د (١ - ح)

∴ رد × ح = س د (١ - ح)

ومنها نجد أن احتمال بيع الوحدة الحدية هو

$$ح = \frac{س د}{ر د + س د}$$

وتحسب قيمة ح من التوزيع الاحتمالي المتجمع الصاعد أو الهابط وحجم الكمية المنتجة أو المخزنة المقابلة لقيمة ح من نفس التوزيع وذلك بتطبيق القانون الذي يستخدم في إيجاد الوسيط والمقاييس المماثلة. ولبيان كيفية الحساب فإنّا نعود إلى التمرين التوضيحي السابق، حيث

ر د = ١٠

س د = ٥

$$ح = \frac{٥}{١٠ + ٥} = \frac{١}{٣} = ٠,٣٣$$

$$١ - ح = ١ - ٠,٣٣ = ٠,٦٧$$

والتوزيع الاحتمالي المتجمع الصاعد هو

| المبيعات بالوحدة | احتمال هذا المستوى من المبيعات | احتمال عدم بيع الوحدة الحدية |
|---|---|---|
| ١٠٠ | ٠,١ | صفر |
| ٢٠٠ | ٠,٢ | ٠,١ |
| ٣٠٠ | ٠,٣ | ٠,٣ |
| ٤٠٠ | ٠,٢ | ٠,٦ |
| ٥٠٠ | ٠,٢ | ٠,٨ |
| المجموع | ١,٠ | |

وحيث أن ١ - ح = ٠,٦٧ تقع بين ٠,٦ ، ٠,٨ فإن حجم الانتاج أو مستوى التخزين الذي يحقق أكبر ربح متوقع يجب أن يقع بين ٤٠٠، ٥٠٠ وبالتالي فإن

$$\text{الحجم الأمثل للانتاج أو الطلبية} = ٤٠٠ + \frac{٠,٦٧ - ٠,٦}{٠,٨ - ٠,٦} \times ١٠٠$$

$$= ٤٠٠ + \frac{٠,٠٧}{٠,٢٠} \times ١٠٠$$

$$= ٤٠٠ + \frac{٧٠٠}{٢٠} = ٤٣٥$$

## أسئلة وتماريـــن (٢)

(١ ـ ٢) يصنّف رئيس قسم شؤون الموظفين في مؤسسة معينة المتقدمين للعمل كمهندسين في مؤسسته إلى: (١) أشخاص يحملون درجة جامعية في الهندسة (٢) أشخاص لديهم الخبرة العملية الهندسية. فإذا علم أن نسبة الذين يحملون شهادة جامعية من بين المتقدمين للعمل سواء كان لديهم خبرة أم لا هي ٧٠٪ ونسبة الذين لديهم خبرة عملية سواء كانوا يحملون شهادة جامعية أم لا هي ٦٠٪ ونسبة الذين يحملون شهادة جامعية ولديهم خبرة عملية هي ٥٠٪ واخترنا عشوائياً شخصاً من بين المتقدمين للعمل، ما احتمال أن يكون من الأشخاص الذين يحملون شهادة جامعية أو لديهم الخبرة العملية الهندسية؟ وما احتمال أن يكون من الأشخاص الذين لا يحملون شهادة جامعية وليس لديهم الخبرة العملية الهندسية؟

(٢ ـ ٢) مصنعان ينتجان المصابيح الكهربائية، الأول ينتج ٧٥٪ من حاجة السوق و٧٠٪ من انتاجه يعمّر ٦٠٠ ساعة فأكثر أما الثاني فإنه ينتج ٢٥٪ من حاجة السوق و٩٥٪ من انتاجه يعمّر ٦٠٠ ساعة فأكثر، فإذا اخترنا عشوائياً مصباحاً كهربائياً من انتاج هذين المصنعين فما هو احتمال أن يعمر ٦٠٠ ساعة فأكثر؟ وإذا وجد أنه من المصابيح التي تعمّر ٦٠٠ ساعة فأكثر فما هو احتمال أن يكون من انتاج المصنع الأول؟

(٣ ـ ٢) إذا كانت نسبة العمال الذكور في مصنع معين تساوي ٠,٦٥ ونسبة العمال الذكور والمتزوجين ٠,٤٧، ونسبة العمال المتزوجين ٠,٧٠ واخترنا عشوائياً مفردة من عمال هذا المصنع فما هو احتمال:

١ ـ أن تكون هذه المفردة أنثى متزوجة؟

٢ ـ أن تكون هذه المفردة ذكراً أو متزوجاً (ذكراً أو أنثى) أو الاثنين معاً؟

(٤ ـ ٢) أجرت وكالة إحدى الثلاجات دراسة شملت ٨٠٠ أسرة في مدينة ما وقد

أمكن الحصول على بيانات عن حجم الثلاجة التي تملكها الأسرة وقت القيام بالدراسة وحجم الثلاجة التي تفضلها ربة الأسرة، وصنّفت أسر العينة في جدول مزدوج على النحو التالي:

| | | حجم الثلاجة المفضّل | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | أقل من ٩ قدم | ٩-١١ قدم | ١١ قدم فأكثر | المجموع |
| حجم الثلاجة الحالية | أقل من ٩ قدم | ٩٠ | ٨٠ | ٧٠ | ٢٤٠ |
| | ٩-١١ قدم | ١٠ | ٤٠٠ | ٣٠ | ٤٤٠ |
| | ١١ قدم فأكثر | صفر | ٢٠ | ١٠٠ | ١٢٠ |
| | المجموع | ١٠٠ | ٥٠٠ | ٢٠٠ | ٨٠٠ |

فإذا اخترنا عشوائياً مفردة من مجتمع هذه الدراسة، أوجد ما يأتي:

١ ـ احتمال أن تكون هذه المفردة من مالكي الثلاجات أقل من ٩ قدم

٢ ـ احتمال أن تكون هذه المفردة ممن يفضلون الثلاجة ١١ قدم فأكثر

٣ ـ احتمال أن تكون هذه المفردة ممن يفضلون الثلاجة ٩ ـ ١١ قدم إذا علمت أنها تملك ثلاجة ١١ قدم فأكثر.

٤ ـ احتمال أن تفضل الثلاجة التي تملكها حالياً.

٥ ـ احتمال أن تكون ممن يفضلون حجماً أكبر من حجم الثلاجة التي تملكها حالياً.

(٥ ـ ٢) يانصيب خيري مكون من ١٠ آلاف تذكرة ويعطي ١٠٠ جائزة. ما هو أقل عدد من التذاكر الذي يجب أن يشتريه شخص ما كي يكون احتمال أن يربح جائزة واحدة على الأقل أكثر من ٠,٥٠؟
(ملاحظة: لو ٩٩ = ١,٩٩٥٦، لو٢ = ٠,٣٠١)

(٦ ـ ٢) إذا رمينا زهرة طاولة منتظمة وقطعة نقود غير متحيزة وسحبنا ورقة من مجموعة أوراق اللعب، فما هو احتمال أن يظهر الرقم ٦ على زهرة الطاولة والصورة على قطعة النقود والرقم ٧ على ورقة اللعب؟

(٧ ـ ٢) إذا فرضنا أن ٥٪ من الذكور، ١٪ من الإناث في مجتمع معين عندهم عمى

ألـوان واختار بـاحث شخصاً عنـده عمى ألوان، مـا احتمال أن يكـون هذا الشخص ذكراً؟ وما احتمال أن يكون هذا الشخص أنثى؟

(٨ ـ ٢) ثـلاثـة أشخـاص يعملون مستقلين عن بعضهم البعض لحـل رمـوز رسـالـة سريـة، فإذا كـانت احتمالات نجـاحهم في ذلك هي $\frac{١}{٥}$، $\frac{١}{٤}$، $\frac{١}{٣}$ على التوالي، فما هو احتمال حل الرسالة؟

(٩ ـ ٢) إذا كان لدينا جدول الحياة التالي:

| العمر س | عدد الأشخاص الذين يعيشون حتى العمر س |
|---|---|
| صفر | ١٠٠٠٠٠ |
| ١٠ | ٩٣٦٠١ |
| ٢٠ | ٩٢٢٩٣ |
| ٣٠ | ٩٠٠٩٢ |
| ٤٠ | ٨٦٨٨٠ |
| ٥٠ | ٨٠٥٢١ |
| ٦٠ | ٦٧٧٨٧ |
| ٧٠ | ٤٦٧٣١ |
| ٨٠ | ١٩٨٦٠ |
| ٩٠ | ٢٨١٢ |
| ١٠٠ | ٦٥ |

أوجد

١ ـ احتمال أن يعيش المولود حتى العمر ٤٠ سنة

٢ ـ احتمال أن يعيش خمسة أشخاص في سن الثلاثين حتى سن الأربعين.

٣ ـ في عائلة مكونة من أب عمره ٤٠ سنة وأم عمرها ٣٠ سنة وولـد عمره ١٠ سنوات، احتمال أن يعيشوا جميعاً ١٠ سنوات أخرى.

(١٠ ـ ٢) قامت شركة بفحص ٥٠٠ من المتقدمين للعمل لديهـا كسائقي آلات ثقيلة (أ، ب) وكانت نتيجة الفحص كما يلي:

٣٠٠ شخص يجيدون العمل على الآلة أ.

٢٠٠ شخص يجيدون العمل على الآلة ب

١٤٠ شخص يجيدون العمل على الآلة أ والآلة ب

فإذا اخترنا عشوائياً شخصاً من هذه المجموعة، فما هو احتمال أن يجيد العمل على آلة واحدة على الأقل.

(١١ ـ ٢) إذا كان لدينا ثلاثة عمال في أحد المصانع، وكان انتاجهم اليومي ونسبة التالف في انتاج كل منهم كما يلي:

| العامل | الانتاج اليومي بالوحدة | نسبة التالف في الانتاج اليومي للعامل |
|---|---|---|
| أ | ٤٠ | ٠,٠١ |
| ب | ٣٥ | ٠,٠٥ |
| جـ | ٢٥ | ٠,٠٢ |

واخترنا عشوائياً وحدة من انتاج هؤلاء العمال في يوم معين، فما هو احتمال أن تكون هذه الوحدة تالفة؟ وإذا علم أنها تالفة ما احتمال أن تكون من انتاج العامل الأول؟

(١٢ ـ ٢) إذا كانت نسبة الطلاب الذكور في كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية الذين يلعبون كرة القدم هي ٤٠٪ والذين يلعبون كرة السلة هي ٢٠٪ والذين يلعبون كرة القدم وكرة السلة معاً هي ١٠٪ واخترنا عشوائياً طالباً من طلاب هذه الكلية، فما هو احتمال أن يكون من لاعبي كرة القدم أو كرة السلة؟ وما هو احتمال أن لا يكون من لاعبي كرة القدم وكرة السلة؟

(١٣ ـ ٢) إذا كان احتمال أن يحال عطاء مد شبكة المياه في مدينة معينة على متعهد ما هو $\frac{٢}{٣}$ واحتمال أن يحال عليه عطاء مد شبكة الكهرباء في نفس المدينة هو $\frac{٥}{٩}$، وإذا كان احتمال أن يحصل على عطاء واحد على الأقل هو $\frac{٤}{٥}$، فما هو احتمال أن يحصل على العطائين معاً؟

(١٤ ـ ٢) تقدم شخصان بطلبين للحصول على وظيفة في مؤسسة معينة، فإذا كان احتمال أن يحصل الشخص الأول على الوظيفة المذكورة هو $\frac{١}{٧}$ واحتمال أن يحصل عليها الشخص الثاني هو $\frac{١}{٥}$، أوجد:

١ - احتمال أن يحصل الشخصان على الوظيفة

٢ - احتمال أن يحصل شخص واحد فقط على الوظيفة

٣ - احتمال أن لا يحصل أي منهما على الوظيفة.

(١٥ - ٢) شركة تفكر في إنتاج سلعة جديدة وتقدّر دائرة التخطيط والتسويق في هذه الشركة أنها إذا قامت بإنتاج هذه السلعة بنفس الإمكانيات الحالية فإنها سوف تحصل على الأرباح التالية باحتمال مبين إزاء كل منها:

| الربح | الاحتمال |
|---|---|
| ٣٠٠ ألف دينار | ٠,٦٠ |
| ١٥٠ ألف دينار | ٠,٣٠ |
| ٧٠ ألف دينار | ٠,١٠ |

أما إذا قامت الشركة بتطوير الآلات والأجهزة والإمكانيات الأخرى بنفقات تطوير مقدارها ١٠ آلاف دينار فإن كل ربح من الأرباح السابقة يقل بمقدار ٢٠ ألف دينار ولكن تتغير بالمقابل احتمالات الربح لتصبح ٠,٨٥، ٠,١٠، ٠,٠٥ على التوالي. وبالإضافة إلى ذلك فإن إدارة الشركة تعتقد بأن احتمال نجاح خطة التطوير هو ٠,٧٠ وإن احتمالات الربح في حالة عدم نجاح خطة التطوير تبقى ثابتة كما هي في حالة عدم اللجوء إلى هذه الخطة.

والمطلوب هو مساعدة الشركة بإتخاذ قرار بالتطوير أو عدمه وذلك باستخدام شجرة القرارات.

(١٦ - ٢) إذا كان لدى مصنع لإنتاج الأغذية المحفوظة بديلان: الأول هو بناء مجمّع كبير في منطقة أخرى لمواجهة طلبات المستهلكين المتزايدة، والثاني هو بناء مجمّع صغير بجانب المصنع الحالي ومرتبط به ومن ثم توسيعه إذا ازداد حجم السوق بشكل يبرر ذلك. وتقدّر إدارة المصنع تكاليف إنشاء مجمّع كبير بـ ١٠٠ ألف دينار وتكاليف بناء مجمّع صغير بـ ٧٠ ألف دينار وتكاليف توسيعه في المستقبل، إذا لزم ذلك، بـ ٤٠ ألف دينار واحتمال تزايد الطلب بشكل يبرّر هذا التوسع بـ ٠,٥٠. وتصنّف دائرة التخطيط والتسويق في هذا المصنع مستوى الطلب

والربح الإجمالي والإحتمال المرتبط بكل مستوى، في حالة اختيار البديل الثاني، على النحو التالي:

| مستوى الطلب | الربح الإجمالي | الاحتمال في حالة مواتاة السوق للتوسع | الاحتمال في حالة عدم مواتاة السوق للتوسع |
|---|---|---|---|
| عال | ٣٠٠ ألف دينار | ٠,٧٠ | ٠,١٥ |
| متوسط | ١٠٠ ألف دينار | ٠,٢٠ | ٠,٢٥ |
| ضعيف | ٥٠ ألف دينار | ٠,١٠ | ٠,٦٠ |

كما أن مستوى الطلب والربح الإجمالي والإحتمال المرتبط بكل مستوى في حالة بناء مجمّع كبير في منطقة أخرى هو كما يلي:

| مستوى الطلب | الربح الإجمالي | الاحتمال |
|---|---|---|
| عال | ٢٠٠ ألف دينار | ٠,٤٠ |
| متوسط | ١٠٠ ألف دينار | ٠,٣٠ |
| ضعيف | ٣٠ ألف دينار | ٠,٣٠ |

والمطلوب هو مساعدة هذه الشركة في إتخاذ القرار المناسب وذلك باستخدام شجرة القرارات.

(١٧ - ٢) تاجر ملابس صوفية يريد تحديد الكمية التي سيطلبها من نوع معين من الملابس التي سيبيعها في موسم الشتاء القادم.

إذا اعطيت لك المعلومات التالية:

- التاجر يكسب ١٠ دنانير في القطعة التي يتمكن من بيعها خلال الموسم بينما يخسر ٥ دنانير في القطعة التي يضطر إلى بيعها في تصفية نهاية الموسم.
- يقدر التاجر مبيعاته المنتظرة خلال موسم الشتاء القادم من هذا النوع من الملابس على النحو التالي:

| إذا كان الشتاء | المبيعات المنتظرة بالقطعة |
|---|---|
| بارداً جداً | ٥٠٠ |
| بارداً | ٣٠٠ |
| معتدلاً | ٢٠٠ |
| دافئاً | ٥٠ |

كما تبيّن من إحصاءات دائرة الأرصاد الجوية ما يأتي:

| الشتاء | التكرار النسبي |
|---|---|
| بارد جداً | ١٠٪ |
| بارد | ٤٠٪ |
| معتدل | ٣٠٪ |
| دافىء | ٢٠٪ |

والمطلوب تحديد:

١ - الكمية التي يجب أن يطلبها التاجر لتحقيق أكبر ربح مُتوقع وذلك باستخدام جدول الأرباح المشروطة وجدول الخسائر المشروطة والتحليل الحدي.

٢ - قيمة المعلومات الكاملة.

((١٨ - ٢) إذا كان الطلب على نوع من الفطائر في أحد المخابز يتبع التوزيع الإحتمالي التالي:

| حجم الطلب بالكيلوغرام | الاحتمال |
|---|---|
| ١٠٠ | ٠,٢ |
| ١٥٠ | ٠,٣ |
| ٢٠٠ | ٠,٤ |
| ٢٥٠ | ٠,١ |

وإذا كان المخبز يربح ٥ قروش في كل كيلوغرام يباع في اليوم الذي

يخبز فيه ويخسر ١٠ قروش في كل كيلوغرام لا يباع في اليوم الذي يخبز فيه (وهذا هو سعر التكلفة حيث أن الفطائر تصبح غير صالحة عندما لا تباع في موعدها). فما هي الكمية التي يعدها المخبز لتحقيق أكبر ربح متوقع؟ وما هي قيمة المعلومات الكاملة؟ استخدم التحليل الحدي في تحديد الكمية التي تحقق أكبر ربح متوقع إذا علم أن حجم الطلب يمكن أن يكون أية كمية في المدى ١٠٠ ـ ٢٥٠.

(١٩ ـ ٢) قام باحث بدراسة عينة من الأطفال لمعرفة مدى إصابة أفراد هذه العينة بأحد أمراض العيون أو الأسنان أو الأذن، وحصل من هذه الدراسة على النتائج التالية:

٣١٪ مصابون بأحد أمراض العيون (أ)

٣٣٪ مصابون بأحد أمراض الأسنان (ب)

٢٧٪ مصابون بأحد أمراض الأذن (جـ)

٦٪ مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأسنان وأصحاء الأذن

١٠٪ مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأذن وأصحاء الأسنان

١٢٪ مصابون بأحد أمراض الأسنان وأحد أمراض الأذن وأصحاء العيون

٤٪ مصابون بأحد أمراض العيون وأحد أمراض الأذن وأحد أمراض الأسنان.

١ ـ أوجد نسبة الأصحاء بالعينة

٢ ـ إذا اخترنا عشوائياً أحد أطفال هذه العينة، ما هو احتمال أن يكون مصاباً بأحد الأمراض على الأقل؟

٣ ـ إذا اخترنا عشوائياً أحد أطفال هذه العينة، ما هو احتمال أن يكون من المصابين بأحد أمراض الأذن وأصحاء العيون والاسنان؟

# الباب الثالث

## المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية

## Random Variables and Probability Distributions

تقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين:

**أولاً: متغيرات عشوائية متقطعة** **Discrete Random Variables**

والمتغير العشوائي المتقطع هو المتغير الذي يأخذ أي قيمة من عدد محدود من القيم باحتمال معين ولا يأخذ أي قيمة بينها. فعدد أفراد الأسرة يمكن أن يكون ٢ أو ٣ أو ٤ ....... ولا يمكن أن يكون ٣,٥ مثلاً. وإذا أردنا توزيع أسابيع السنة (٥٢ أسبوع) حسب عدد حوادث العمل في مصنع معين فإن المتغير (عدد حوادث العمل في هذه الحالة) يأخذ القيم صفر، ١، ٢، ......

**ثانياً: متغيرات عشوائية متصلة** **Continuous Random Variables**

والمتغير العشوائي المتصل هو الذي يأخذ أي قيمة في مدى معين فإذا اعتبرنا عمر الطالب في كلية الإقتصاد والتجارة وحصلنا على طالب عمره ١٩ عاماً وطالب ثان عمره ١٩ عاماً و ٣ أشهر فإنه من الممكن أيضاً أن نجد طالباً ثالثاً عمره يقع بين عمر الطالب الأول وعمر الطالب الثاني. والمتغيرات العشوائية المتصلة كثيرة منها: الدخل، الوزن، الطول، المسافة، ..... ووقوع المتغير العشوائي في فترة مهما صغرت من المدى الذي يتغير فيه يرتبط باحتمال معين.

# الفصل الأول

## دالة كثافة الإحتمال ودالة الإحتمال التجميعي

## Probability Density Function and Cumulative Probability Function

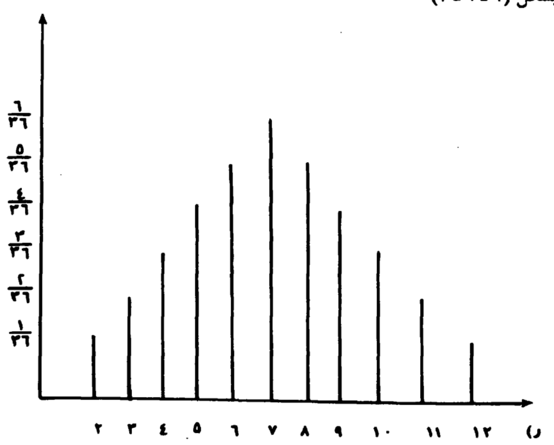
### (١ - ١ - ٣) دالة الاحتمال للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها

إذا كان المتغير العشوائي المتقطع س يأخذ القيم ٠ ، ١ ، ٢ ، .... باحتمالات معينة فإن ح (س = ر) تسمى دالة الاحتمال لهذا المتغير حيث ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ....... فإذا رمينا زهرتي طاولة وكان الرامي غير متحيز فإن المجموع (س) الذي يظهر على الزهرتين معاً يسمى متغيراً متقطعاً ويأخذ القيم ٢ ، ٣ ، .... ، ١٢. ويمكن كتابة التوزيع الاحتمالي Probability Distribution لهذا المتغير على النحو التالي وذلك باستخدام المعادلة (١ - ١ - ٢)

| ر | ح (س = ر) |
|---|---|
| ٢ | $\frac{١}{٣٦}$ |
| ٣ | $\frac{٢}{٣٦}$ |
| ٤ | $\frac{٣}{٣٦}$ |
| ٥ | $\frac{٤}{٣٦}$ |
| ٦ | $\frac{٥}{٣٦}$ |
| ٧ | $\frac{٦}{٣٦}$ |

| | |
|---|---|
| ٨ | $\frac{٥}{٣٦}$ |
| ٩ | $\frac{٤}{٣٦}$ |
| ١٠ | $\frac{٣}{٣٦}$ |
| ١١ | $\frac{٢}{٣٦}$ |
| ١٢ | $\frac{١}{٣٦}$ |
| المجموع | $\frac{٣٦}{٣٦}$ |

ويمكن عرض بيانات هذا التوزيع بخطوط عمودية Bar Chart على النحو المبيّن بشكل (١ ـ ١ ـ ٣)




شكل (١ ـ ١ ـ ٣)

وتتصف دالة الإحتمال للمتغير العشوائي المتقطع ح (س = ر) بالخواص التالية:

١ ـ قيمة دالة الإحتمال موجبة لجميع قيم المتغير أي أن ح(س = ر) ⩾ صفر

٢ ـ تقع قيمة دالة الإحتمال لجميع قيم المتغير بين صفر و ١، أي أن
صفر ⩽ ح (س = ر) ⩽ ١

٣ ـ مجموع الاحتمالات لجميع قيم المتغير س يساوي واحد صحيح،
أي أن $\sum_{ر=١}^{\infty}$ ح (س = ر) = ١

## (٢ ـ ١ ـ ٣) دالة الاحتمال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها:

نرمز لدالة الاحتمال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع بالرمز ع (س)، والاحتمالات التجميعية لهذا المتغير التي يمكن أن نحسبها هي:

١ ـ ح (س ⩽ ر) ، ح (س < ر)

٢ ـ ح (س ⩾ ر) ، ح (س > ر)

٣ ـ ح (ر ⩽ س ⩽ و) ، ح (ر < س ⩽ و) ، ح (ر ⩽ س < و) ، ح (ر < س < و) حيث و > ر.

فإذا اعتبرنا مثال زهرتي الطاولة السابق، فإن:

ح (س ⩽ ٤) = $\frac{١}{٣٦}$ + $\frac{٢}{٣٦}$ + $\frac{٣}{٣٦}$ = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ح (س < ٤) = $\frac{١}{٣٦}$ + $\frac{٢}{٣٦}$ = $\frac{٣}{٣٦}$ = $\frac{١}{١٢}$

ح (س ⩾ ٩) = $\frac{٤}{٣٦}$ + $\frac{٣}{٣٦}$ + $\frac{٢}{٣٦}$ + $\frac{١}{٣٦}$ = $\frac{١٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$

ح (س > ٩) = $\frac{٣}{٣٦}$ + $\frac{٢}{٣٦}$ + $\frac{١}{٣٦}$ = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ح (٣ ⩽ س ⩽ ٦) = $\frac{٢}{٣٦}$ = $\frac{٣}{٣٦}$ + $\frac{٤}{٣٦}$ + $\frac{٥}{٣٦}$ = $\frac{١٤}{٣٦}$ = $\frac{٧}{١٨}$

ح (٣ < س ⩽ ٦) = $\frac{٣}{٣٦}$ $\frac{٤}{٣٦}$ + $\frac{٥}{٣٦}$ = $\frac{١٢}{٣٦}$ = $\frac{١}{٣}$

ح (٣ ⩽ س < ٦) = $\frac{٢}{٣٦}$ + $\frac{٣}{٣٦}$ + $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

ح (٣ < س < ٦) = $\frac{٣}{٣٦}$ + $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{٧}{٣٦}$

وتتصف دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتقطع بأنها:

١ ـ غير متناقصة Nondecreasing

٢ ـ ح (س < الحد الأدنى) = صفر

ح (س > الحد الأعلى) = صفر

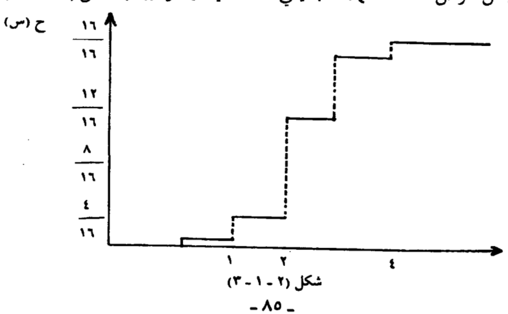
ح (س ≤ الحد الأعلى) = ١

٣ ـ غير متصلة Discontinuous

فإذا رمينا قطعة نقود ٤ مرات فإن التوزيع الاحتمالي والاحتمالات التجميعية لعدد مرات ظهور الصورة هو:

| ر | ح (س = ر) | ع (س) = ح (س ≤ ر) |
|---|---|---|
| ٠ | $\frac{ق^{٤}_{٠}}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$ | $\frac{١}{١٦}$ |
| ١ | $\frac{ق^{٤}_{١}}{٢^{٤}} = \frac{٤}{١٦}$ | $\frac{٥}{١٦}$ |
| ٢ | $\frac{ق^{٤}_{٢}}{٢^{٤}} = \frac{٦}{١٦}$ | $\frac{١١}{١٦}$ |
| ٣ | $\frac{ق^{٤}_{٣}}{٢^{٤}} = \frac{٤}{١٦}$ | $\frac{١٥}{١٦}$ |
| ٤ | $\frac{ق^{٤}_{٤}}{٢^{٤}} = \frac{١}{١٦}$ | $\frac{١٦}{١٦}$ |

ويمكن عرض دالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير كما هو مبين بالشكل (٢ ـ ١ ـ٣).




شكل (٢ ـ ١ ـ ٣)

يتضح من الشكل (٢ ـ ١ ـ ٣) أن دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتقطع متدرجة.

٤ ـ لا يمكن الحصول على دالة الاحتمال للمتغير المتقطع من دالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير باستخدام التفاضل.

### (٣ ـ ١ ـ ٣) دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل وخواصها:

المتغير العشوائي س يسمّى متغيراً متصلاً إذا وجد دالة تسمى دالة كثافة احتمال لهذا المتغير نرمز لها بالرمز ح (س) وتحقق الشروط التالية:

١ ـ ح (س) $\geqslant$ صفر $\quad -\infty <$ س $< \infty$

٢ ـ ح (س $<$ س $<$ س + $\Delta$ س) = $\int_{س}^{س + \Delta س}$ ح (س) د س

٣ ـ $\int_{-\infty}^{\infty}$ ح (س) د س = ١

ونحسب في هذه الحالة احتمال أن يقع المتغير في فترة أو مجموعة غير متداخلة من الفترات. ولا يؤثر على قيمة الاحتمال أن تكون الفترة مفتوحة أو مغلقة حيث أن احتمال أن يأخذ المتغير المتصل قيمة محددة يساوي صفراً. والقيمة التي تحصل عندما نعوض عن المتغير بقيمة معينة في دالة كثافة الاحتمال عبارة عن الاحداثي الصادي عند هذه القيمة.

فإذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال:

ح (س) = $\frac{١}{٤٨}$(س + ٣) $\qquad$ ٢ $<$ س $<$ ٨

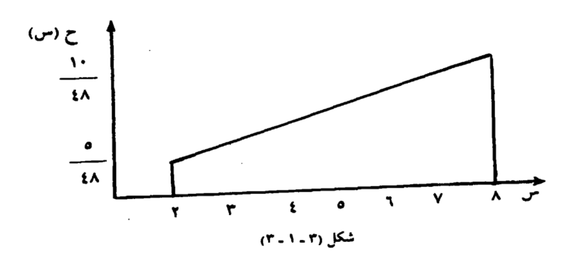
= صفر $\qquad$ فيما عدا ذلك

فإن قيمة هذه الدالة أكبر من صفر لجميع قيم المتغير، كما أن

$\int_{٢}^{٨} \frac{١}{٤٨}$(س + ٣) د س = $\frac{١}{٤٨}$ [ $\frac{س^{٢}}{٢}$ ٣ س $]_{٢}^{٨}$

= ١

ويمكن رسم هذه الدالة كما هو مبين بالشكل (٣ ـ ١ ـ ٣)



شكل (٣ - ١ - ٣)

**(٤ - ١ - ٣) دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل وخواصها:**

سوف نرمز لدالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل بـالرمـز ع (س) حيث

$$ع(س) = \int_{-\infty}^{س} ح(س)\, د س$$

والاحتمالات التجميعية التي يمكن أن ندرسها هي:

$$\int_{-\infty}^{س} ح(س)\, د س \text{ ، } \int_{س_1}^{\infty} ح(س)\, د س \text{ ، } \int_{س_1}^{س_2} ح(س)\, د س$$

حيث $س_2 > س_1$

وتتصف دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل بالصفات التالية:

١ - دالة غير تناقصية

٢ - ع ($-\infty$) = صفر ، ع ($+\infty$) = ١ ، ح ($س_1 < س < س_2$)

$$= \int_{س_1}^{س_2} ح(س)\, د س$$

٣ - دالة متصلة

٤ - يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل بإيجاد المشتقة الأولى لدالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير.

فإذا اعتبرنا دالة كثافة الاحتمال:

$$ح(س) = \frac{١}{٤٨}(س + ٣) \qquad ٢ < س < ٨$$

$$= صفر \qquad \text{فيما عدا ذلك}$$

فإن

$$ع(س) = \int_{٢}^{س} \frac{١}{٤٨}(س + ٣)\, د\, س = \frac{١}{٤٨}\left(\frac{س^{٢}}{٢} + ٣\, س - ٨\right)$$

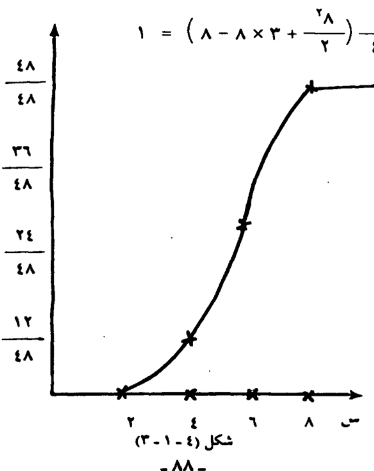
ويمكن رسم دالة الاحتمال التجميعي لهذا المتغير على النحو التالي والمنحنى كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ١ ـ ٣)

$$ع(٢) = \frac{١}{٤٨}\left(\frac{٢^{٢}}{٢} + ٣ \times ٢ - ٨\right) = صفر$$

$$ع(٤) = \frac{١}{٤٨}\left(\frac{٤^{٢}}{٢} + ٣ \times ٤ - ٨\right) = \frac{١٢}{٤٨}$$

$$ع(٦) = \frac{١}{٤٨}\left(\frac{٦^{٢}}{٢} + ٣ \times ٦ - ٨\right) = \frac{٢٨}{٤٨}$$

$$ع(٨) = \frac{١}{٤٨}\left(\frac{٨^{٢}}{٢} + ٣ \times ٨ - ٨\right) = ١$$




شكل (٤ ـ ١ ـ ٣)

## (٥ ـ ١ ـ ٣) دالة كثافة الاحتمال المشتركة والهامشية والشرطية:

**Joint, Marginal and Conditional Probability Density Functions:**

سوف ندرس هذه الدوال في حالة المتغيرات المتقطعة والمتصلة

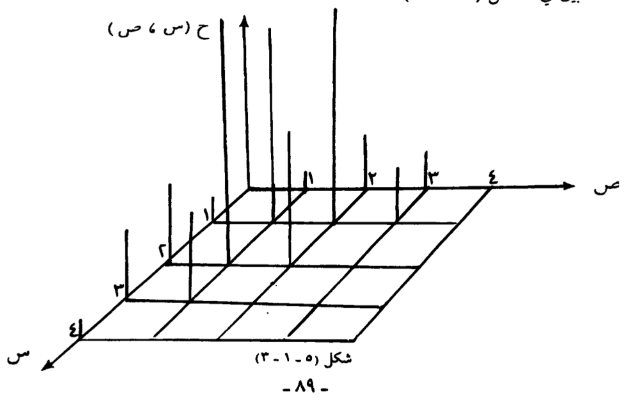
**أولاً**: المتغيرات المتقطعة:

إذا كان لدينا كيس به ن كرة متشابهة وموزعة على النحو التالي: $ن_١$ كرة بيضاء، $ن_٢$ كرة حمراء، $ن_٣$ كرة خضراء بحيث أن $ن_١ + ن_٢ + ن_٣ = ن$ وسحبنا م كرة من هذا الكيس وفرضنا أن س يرمز لعدد الكرات البيضاء، ص يرمز لعدد الكرات الخضراء، فإن دالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين س، ص يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$ح(س = ر_١ ، ص = ر_٢) = \frac{\binom{ن_١}{ر_١}\binom{ن_٢}{ر_٢}\binom{ن_٣}{م - ر_١ - ر_٢}}{\binom{ن}{م}} \qquad (١ - ١ - ٣)$$

$$صفر \leqslant ر_١ + ر_٢ \leqslant م$$

وإذا فرضنا أن ن = ١٥ ، $ن_١ = ٦$ ، $ن_٢ = ٥$ ، $ن_٣ = ٤$ وسحبنا مع الإعادة ٤ كرات، فإنه يمكن كتابة دالة الاحتمال بالتعويض في (١ ـ ١ ـ ٣) ورسمها كما هو مبين في الشكل (٥ ـ ١ ـ ٣)




شكل (٥ ـ ١ ـ ٣)

أما دالة الاحتمال الهامشية لعدد الكرات من اللون الأبيض (س) فهي:

$$\text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١) = \sum_{\text{ر}_٢ = ٠}^{٤} \text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١ ، \text{ص} = \text{ر}_٢)$$

$$= \sum_{\text{ر}_٢ = ٠}^{٤} \frac{\binom{٦}{\text{ر}_١}\binom{٥}{\text{ر}_٢}\binom{٤}{٤ - \text{ر}_١ - \text{ر}_٢}}{\binom{١٥}{٤}}$$

$$= \frac{\binom{٦}{\text{ر}_١}\binom{٩}{٤ - \text{ر}_١}}{\binom{١٥}{٤}} \qquad \text{صفر} \leqslant \text{ر}_١ \leqslant ٤$$

أما دالة الاحتمال الشرطية لعدد الكرات البيضاء (س) إذا علم عدد الكرات الخضراء (ص) فهي:

$$\text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١ / \text{ص} = \text{ر}_٢) = \frac{\text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١ ، \text{ص} = \text{ر}_٢)}{\text{ح}(\text{ص} = \text{ر}_٢)}$$

$$\frac{\binom{٦}{\text{ر}_١}\binom{٥}{\text{ر}_٢}\binom{٤}{٤ - \text{ر}_١ - \text{ر}_٢}}{\binom{١٥}{٤}} \div \frac{\binom{٥}{\text{ر}_٢}\binom{١٠}{٤ - \text{ر}_٢}}{\binom{١٥}{٤}}$$

$$= \frac{\binom{٦}{\text{ر}_١}\binom{٤}{٤ - \text{ر}_١ - \text{ر}_٢}}{\binom{١٠}{٤ - \text{ر}_٢}} \qquad \text{صفر} \leqslant \text{ر}_١ \leqslant ٤ - \text{ر}_٢$$

$$\text{ر}_٢ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$$

ودالة الاحتمال الشرطية لعدد الكرات الخضراء (ص) إذا علم عدد الكرات البيضاء (س) هي:

$$\text{ح}(\text{ص} = \text{ر}_٢ / \text{س} = \text{ر}_١) = \frac{\text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١ ، \text{ص} = \text{ر}_٢)}{\text{ح}(\text{س} = \text{ر}_١)}$$

$$= \frac{\binom{٦}{\text{ر}_١}\binom{٥}{\text{ر}_٢}\binom{٤}{٤ - \text{ر}_١ - \text{ر}_٢}}{\binom{١٥}{٤}} \div \frac{\binom{٦}{٣}\binom{٩}{٤ - \text{ر}_١}}{\binom{١٥}{٤}}$$

$$= \frac{\binom{٥}{\text{ر}_٢}\binom{٤}{٤ - \text{ر}_١ - \text{ر}_٢}}{\binom{٩}{٤ - \text{ر}_١}} \qquad \text{صفر} \leqslant \text{ر}_٢ \leqslant ٤ - \text{ر}_١$$

$$\text{ر}_١ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$$

**ثانياً: المتغيرات المتصلة**

سوف نعتبر هنا للسهولة دالة كثافة احتمال مشتركة لمتغيرين فقط. فإذا فرضنا أن

دالة كثافة الاحتمال هي:

$$ح (س ، ص) = \frac{١}{٨} (٦ - س - ص) \qquad صفر < س < ٢ ، ٢ < ص < ٤$$

= صفر فيما عدا ذلك

ودالة الاحتمال التجميعي ح (س ، ص) لهذه الدالة هي:

$$ح (س ، ص) = \int_{.}^{س} \int_{٢}^{ص} \frac{١}{٨} (٦ - س - ص) \, د س \, د ص$$

$$= \frac{١}{١٦} س (ص - ٢) (١٠ - ص - س)$$

وتكون دالة الاحتمال التجميعي موزعة على ٩ مناطق كما هو مبين في الشكل (٦ - ١ - ٣)

| ٩ (٢ ، ٤) | ٤ (١ ، ٤) | ٣ |
|---|---|---|
| ٨ (٢ ، ٢) | ٥ (١ ، ٢) | ٢ |
| ٧ | ٦ | ١ |

شكل (٦ - ١ - ٣)

في المنطقة ١

ح (س ، ص) = صفر    ص ≥ صفر ، ص ≤ ٢

في المناطق ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٧

ح (س ، ص) = صفر   س ≥ صفر    ٢ ≤ ص ≤ ٤    في المنطقة ٢

س ≥ صفر    ص ≤ ٤    في المنطقة ٣

صفر ≤ س ≤ ٢    ص ≥ ٢    في المنطقة ٦

س ≤ ٢    ص ≥ ٢    في المنطقة ٧

في المنطقة ٤:

قيمة التكامل موجبة إذا كان صفر ≤ س ≤ س* ، ٢ ≤ ص < ٤ وبالتالي فإن:

$$\text{ع (س ، ص)} = \int_{\text{صفر}}^{\text{س}} \int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{١}{٨} \text{ (٦ − س − ص) د س د ص}$$

$$= \frac{١}{٨} \text{ س (٦ − س) = ح (س ، ٤)}$$

صفر ≤ س ≤ ٢ ، ص ≥ ٤

في المنطقة ٥:

$$\text{ع (س ، ص)} = \int_{\text{صفر}}^{\text{س}} \int_{\text{٢}}^{\text{ص}} \frac{١}{٨} \text{ (٦ − س − ص) د س د ص}$$

$$= \frac{١}{١٦} \text{ س (ص − ٢) (١٠ − ص − س) ، صفر ≤ س ≤ ٢}$$

، ٢ ≤ ص ≤ ٤

في المنطقة ٨:

قيمة التكامل موجبة إذا كان صفر ≤ س ≤ ٢ ، ٢ ≤ ص ≤ ص* وبالتالي فإن:

$$\text{ع (س ، ص)} = \int_{\text{صفر}}^{\text{٢}} \int_{\text{٢}}^{\text{ص}} \frac{١}{٨} \text{ (٦ − س − ص) د س د ص}$$

$$= \frac{١}{٨} \text{ (ص − ٢) (٨ − ص) = ح (٢ ، ص)}$$

س ≥ ٢ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

في المنطقة ٩

$$\text{ع (س ، ص)} = \int_{\text{صفر}}^{\text{٢}} \int_{\text{٢}}^{\text{٤}} \frac{١}{٨} \text{ (٦ − س − ص) د س د ص}$$

$$= \text{١ = ح (٢ ، ٤)}$$

س ≥ ٢ ، ص ≥ ٤

وبوضع جميع هذه النتائج معاً فإن:

ع (س ، ص) = صفر ، ص ≤ ٢

$$= \frac{١}{١٦} \text{ س (ص − ٢) (١٠ − ص − س) ، صفر ≤ س ≤ ٢ ،}$$

٢ ≤ ص ≤ ٤

$= \frac{1}{8}$ س (٦ − س) ، صفر ≤ س ≤ ٢ ، ص ≤ ٤

$= \frac{1}{8}$ (ص − ٢) (٨ − ص)     س ≥ ٢ ، ٢ ≤ ص ≤ ٤

= ١     س ≥ ٢ ، ص ≥ ٤

ويمكن إيجاد إحتمال أن تقع (س، ص) في مستطيل معين وليكن

أ١ ≤ س ≤ أ٢، ب١ ≤ ص ≤ ب٢ كما هو مبين في الشكل (٧ ـ ١ ـ ٣) على النحو التالي:



شكل (٧ ـ ١ ـ ٣)

ح (أ١ ≤ س ≤ أ٢، ب١ ≤ ص ≤ ب٢)

= ج (س ≤ أ٢، ص ≤ ب٢)

− ح (س ≤ أ١، ص ≤ ب١)

− ح (س ≤ أ٢، ص ≤ ب١)

− ح (س ≤ أ١، ص ≤ ب٢)

+ ٢ح (س ≤ أ١، ص ≤ ب١)

وإذا فرضنا أن أ١ = صفر، أ٢ = ١ ، ب١ = ٣، ب٢ = ٤ فإن

ح (صفر ≤ س ≤ ١ ، ٣ ≤ ص ≤ ٤) =

$$\int_{\text{صفر}}^{1}\int_{3}^{4} \frac{1}{8}\ (6 - \text{س} - \text{ص})\ \text{د س د ص}$$

$$= \int_{3}^{4} \left( \frac{11}{16} - \frac{\text{ص}}{8} \right) \text{د ص}$$

$$= \left[ \frac{11}{16}\text{ص} - \frac{\text{ص}^2}{16} \right]_{3}^{4}$$

$$= \frac{44}{16} - 1 - \frac{33}{16} + \frac{9}{16}$$

$$= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

أو

ح (صفر ≤ س ≤ ١، ٣ ≤ ص ≤ ٤) = ح (س ≤ ١ ، ص ≤ ٤)

- ح (س ≤ صفر، ص ≤ ٣) - ح (س ≤ ١، ص ≤ ٣)

- ح (س ≤ صفر. ص ≤ ٤) + ٢ح (س ≤ صفر، ص ≤ ٣)

$$= \int_{٢}^{٤}\int_{.}^{١} \frac{١}{٨}\,(٦ - س - ص)\; د س\; د ص$$

$$- صفر - \int_{٢}^{٣}\int_{.}^{١} \frac{١}{٨}\,(٦ - س - ص)\; د س\; د ص$$

- صفر + ٢ × صفر

$$= \int_{٢}^{٤} \left. \frac{٦}{٨}س - \frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{س\,ص}{٨} \right|_{.}^{١} د ص$$

$$- \int_{٢}^{٣} \left. \frac{٦}{٨}س - \frac{س^{٢}}{١٦} - \frac{س\,ص}{٨} \right|_{.}^{١} د ص$$

$$= \int_{٢}^{٤} \left( \frac{٦}{٨} - \frac{١}{١٦} - \frac{ص}{٨} \right) د ص$$

$$- \int_{٢}^{٣} \left( \frac{٦}{٨} - \frac{١}{١٦} - \frac{ص}{٨} \right) د ص$$

$$= \left[ \frac{٦}{٨}ص - \frac{١}{١٦}ص - \frac{ص^{٢}}{١٦} \right]_{٢}^{٤}$$

$$- \left[ \frac{٦}{٨}ص - \frac{١}{١٦}ص - \frac{ص^{٢}}{١٦} \right]_{٢}^{٣}$$

$$= \left( \frac{٢٤}{٨} - \frac{٤}{١٦} - \frac{١٦}{١٦} \right) - \left( \frac{١٢}{٨} - \frac{٢}{١٦} - \frac{٤}{١٦} \right)$$

$$- \left( \frac{١٨}{٨} - \frac{٣}{١٦} - \frac{٩}{١٦} \right) - \left( \frac{١٢}{٨} - \frac{٢}{١٦} - \frac{٤}{١٦} \right)$$

$$= \frac{١٠}{١٦} - \frac{٦}{١٦} = \frac{٤}{١٦} = \frac{١}{٤}$$

# الفصل الثاني

## العزوم Moments

يمكن حساب العزوم حول أي وسط فرضي أ وسوف نكتفي بدراسة العزوم عندما أ = صفر، أ = $\mu$ (الوسط الحسابي)، أي العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي. وفكرة العزوم في الأحصاء شبيهة إلى حد ما بفكرة العزوم في الميكانيكا إلا أنها في الحالة الأولى شيء يمكن فهمه واستيعابه الا أنه في الحالة الثانية شيء ملموس يمكن مشاهدته.

### (١ - ٢ - ٣) العزوم حول الصفر

نرمز للعزم الواوى حول الصفر بالرمز $\mu'_{و}$ ويعرّف كما يلي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$\mu'_{و} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر^{و} ح\,(س = ر) \qquad (٢ - ٢ - ٣)$$

فإذا كانت و = صفر فان:

$$\mu'_{\cdot} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر^{\cdot} ح\,(س = ر) = ١$$

وإذا كانت و = ١ فإن:

$$\mu'_{١} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر\, ح\,(س = ر) = \mu \text{ الوسط الحسابي}$$

في حالة المتغيرات المتصلة:

$$\mu'_{و} = \int_{-\infty}^{\infty} س^{و} ح\,(س)\, د\,س \qquad (٣ - ٢ - ٣)$$

فإذا كانت و = صفر فإن:

$$\mu'_{\cdot} = \int_{-\infty}^{\infty} س^{\cdot} ح\,(س)\, د\,س = ١$$

وإذا كانت و = ١، فإن:

$$\mu'_{١} = \int_{-\infty}^{\infty} س\ ح\ (س)\ د\ س = \mu \text{ الوسط الحسابي.}$$

### (٢ - ٢ - ٣) العزوم حول الوسط الحسابي

نرمز للعزم الواوي حول الوسط الحسابي بالرمز $\mu_{و}$ ويعرّف كما يلي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$\mu_{و} = \sum_{ر=٠}^{\infty} (ر - \mu)^{و} ح\ (س = ر) \qquad (٤ - ٢ - ٣)$$

فإذا كانت و = صفر فإن:

$$\mu_{٠} = \sum_{ر=٠}^{\infty} (ر - \mu)^{٠} ح\ (س = ر) = ١$$

وإذا كانت و = ١ فإن:

$\mu_{١} = \sum_{ر=١} (ر - \mu)\ ح\ (س = ر) = $ صفر (أي مجموع إنحرافات مجموعة من القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً).

أما إذا كانت و = ٢ فإن:

$$\mu_{٢} = \sum_{ر=٠}^{\infty} (ر - \mu)^{٢} ح\ (س = ر) = \text{التباين}$$

في حالة المتغيرات المتصلة:

$$\mu_{و} = \int_{-\infty}^{\infty} (س - \mu)^{و} ح\ (س)\ د\ س \qquad (٥ - ٢ - ٣)$$

فإذا كانت و = صفر فإن:

$$\mu_{٠} = \int_{-\infty}^{\infty} (س - \mu)^{٠} ح\ (س)\ د\ س = ١$$

وإذا كانت و = ١ فإن:

$\mu_{١} = \int_{-\infty}^{\infty} (س - \mu)\ ح\ (س)\ د\ س) = $ صفر (مجموع إنحرافات قيم المتغير

المتصل وعددهم لا نهائي عن وسطها الحسابي يساوي صفراً)

أما إذا كانت و = ٢ فإن

$$\mu_٢ = \int_{-\infty}^{\infty} (س - \mu)^٢ ح (س) د س = \text{التباين}$$

### (٣ ـ ٢ ـ ٣) العلاقة بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي

إن العزوم حول الوسط الحسابي هي التي تستخدم في قياس الالتـواء والتفرطـح ولكننـا نعبّر عن العـزوم حول الـوسط الحسابي بـدلالة العـزوم حول الصفـر لتسهيـل العمليات الحسابية.

فإذا اعتبرنا معادلة (٥ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\mu_و = \int_{-\infty}^{\infty} (س^و - {}^وق_١ س^{و-١} \mu'_١ + {}^وق_٢ س^{و-٢} \mu'^٢_١ \ldots + (-١)^و \mu'^و_١)$$
ح (س) د س

$$= \int_{-\infty}^{\infty} س^و ح (س) دس - \int_{-\infty}^{\infty} {}^وق_١ س^{و-١} \mu'_١ ح (س) دس + \ldots +$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} (-١)^و \mu'^و_١ ح (س) د س$$

$$= \mu'_و - {}^وق_١ \mu'_{و-١} \mu'_١ + \ldots + (-١)^و \mu'^و_١ \qquad (٣ - ٢ - ٦)$$

وذلك من المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٣)

وعلى هذا فإن

$$\mu_٢ = \mu'_٢ - ٢\mu'_١\mu'_١ + \mu'^٢_١ \qquad (٣ - ٢ - ٧)$$
$$= \mu'_٢ - \mu'^٢_١$$

$$\mu_٣ = \mu'_٣ - {}^٣ق_١ \mu'_٢ \mu'_١ + {}^٣ق_٢ \mu'_١ \mu'^٢_١ - \mu'^٣_١ \qquad (٣ - ٢ - ٨)$$
$$= \mu'_٣ - ٣\mu'_٢ \mu'_١ + ٢\mu'^٣_١$$

$$\mu_٤ = \mu'_٤ - {}^٤ق_١ \mu'_٣ \mu'_١ + {}^٤ق_٢ \mu'_٢ \mu'^٢_١ - {}^٤ق_٣ \mu'_١ \mu'^٣_١ + \mu'^٤_١ \qquad (٣ - ٢ - ٩)$$
$$= \mu'_٤ - ٤\mu'_٣ \mu'_١ + ٦\mu'_٢ \mu'^٢_١ - ٣\mu'^٤_١$$

### (٤ - ٢ - ٣) معاملي الالتواء والتفرطح

سوف نرمز لمعامل الالتواء بالرمز $\beta_1$، ولمعامل التفرطح بالرمز $\beta_2$، ويعرف هذين المعاملين على النحو التالي:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} \qquad (٣ - ٢ - ١٠)$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \qquad (٣ - ٢ - ١١)$$

# الفصل الثالث

## بعض أدلة وصف التوزيعات التكرارية

سوف ندرس الأدلة التالية وخواصها:

| | |
|---|---|
| ١ ـ دليل التوقع | ونرمز له بالرمز ت |
| ٢ ـ دليل التباين | ونرمز له بالرمز تبا |
| ٣ ـ دليل التغاير | ونرمز له بالرمز تغا |

وبالإضافة إلى هذه الأدلة سوف نعرض باختصار معاملي الالتواء والتفرطح

### (١ ـ ٣ ـ ٣) دليل التوقع

إذا كان لدينا متغير س ودالة كثافة إحتماله فإن توقع هذا المتغير عبارة عن وسطه الحسابي، ويعرف التوقع كما يلي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

ت (س) = مجـ$_{ر=-\infty}^{\infty}$ ر ح (س = ر) (١٢ ـ ٣ ـ ٣)

في حالة المتغيرات المتصلة

ت (س) = $\int_{-\infty}^{\infty}$ س ح (س) د س (١٣ ـ ٣ ـ ٣)

ويتصف هذا الدليل بالخواص التالية:

١ ـ إذا كان لدينا قيمة ثابتة أ، فإن ت(أ) = أ

٢ ـ إذا كان لدينا متغير عشوائي س وضربنا كل قيمة من قيم هذا المتغير بالثابت أ فإن ت (أ س) = أ ت (س)

٣ ـ إذا كان لدينا متغيران عشوائيان س، ص وعرّفنا متغيراً ثالثاً ع على النحو التالي

ع = س ± ص فإن ت (ع) = ت (س ± ص) = ت (س) ± ت (ص)

وبشكل عام إذا كان لدينا عدد من المتغيرات العشوائية $س_1$، $س_2$، .... ، $س_ن$ وعرْفنا متغيرا جديدا ع على النحو التالي:

ع = $س_1$ ± $س_2$ ± .... ± $س_ن$ فإن

ت (ع) = ت ($س_1$ ± $س_2$ ± .... ± $س_ن$)

= ت ($س_1$) ± ت ($س_2$) ± .... ± ت ($س_ن$)

سواء كانت المتغيرات العشوائية $س_1$، $س_2$، .... ، $س_ن$ مستقلة أو غير مستقلة.

٤ - إذا كان لدينا متغيران عشوائيان س، ص وعرّفنا متغيرا ثالثاً على النحو التالي:

ع = س × ص فإن

ت (ع) = ت (س × ص) = ت (س) ت (ص) إذا كان س، ص مستقلين

ت (ع) ≠ ت (س) ت (ص) إذا كان س، ص غير مستقلين

وبشكل عام إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة $س_1$، $س_2$، .... ، $س_ن$ وعرّفنا متغيرا جديدا ع على النحو التالي:

ع = $س_1$ × $س_2$ × .... × $س_ن$ فإن

ت (ع) = ت ($س_1$ × $س_2$ × .... × $س_ن$)

= ت ($س_1$) ت ($س_2$) .... ت ($س_ن$)

**مثال ١**

إفرض أن ح (س = ر) = $\binom{٣}{ر}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ ر = ٠، ١، ٢، ٣ فإن

ت (س) = صفر × ح (س = ٠) + ١ × ح (س = ١) + ٢ × ح (س = ٢) + ٣ × ح (س = ٣)

= صفر + $\binom{٣}{١}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ + ٢ $\binom{٣}{٢}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$ + ٣ $\binom{٣}{٣}$ $(\frac{١}{٢})^{٣}$

= صفر + $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{٦}{٨}$ + $\frac{٣}{٨}$

= $\frac{١٢}{٨}$

= ١,٥

ت (س$^{٢}$) = صفر$^{٢}$ × ح (س = ٠) + ١$^{٢}$ح (س = ١) + ٢$^{٢}$ح (س = ٢) + ٣$^{٢}$ ح(س = ٣)

$$= \text{صفر} + \frac{٣}{٩} + \frac{١٢}{٨} + \frac{٩}{٨}$$

$$= \frac{٢٤}{٨}$$

$$= ٣$$

وإذا كانت د (س) = ٣ س$^{٢}$ + ١ فإن:

ت (د (س)) = ت (٣ س$^{٢}$ + ١) = ت (٣س$^{٢}$) + ١ = ٣ت (س$^{٢}$) + ١

= ٣ × ٣ + ١

= ١٠

**مثال ٢**

أفرض أن المتغير العشوائي س له دالة كثافة إحتمال

ح (س) = ٢ س      صفر < س < ١

= صفر      فيما عدا ذلك

فإن:

$$\text{ت (س)} = \int_{٠}^{١} \text{س ح (س) د س}$$

$$= \int_{٠}^{١} \text{س (٢س) د س}$$

$$= ٢ \left[ \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \frac{٢}{٣}$$

وإذا فرضنا أن د (س) = ٣ س٢ − ١ ، فإن

$$\text{ت (د (س))} = \int_{٠}^{١} (\text{٣ س}^{٢} - ١) \text{ ح (س) د س}$$

$$= \int_{٠}^{١} (\text{٣ س}^{٢} - ١) \text{ ٢ س د س}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

### (٢ ـ ٣ ـ ٣) دليل التباين

التباين هو العزم الثاني حول الوسط الحسابي وهو أحد مقاييس التشتت ونرمز لدليل التباين بالرمز تبا Var ويعرّف التباين على النحو التالي:

في حالة المتغيرات المتقطعة

$$\text{تبا (س)} = \sum_{ر=-\infty}^{\infty} \left(ر - \text{ت (س)}\right)^{٢} \text{ ح (س} = ر)$$

$$= \sum_{ر=-\infty}^{\infty} ر^{٢} \text{ ح (س} = ر) - \left\{ \sum_{ر=-\infty}^{\infty} ر \text{ ح (س} = ر) \right\}^{٢}$$

$$= \mu'_{٢} - \mu'^{٢}_{١} \qquad (٣ ـ ٣ ـ ١٤)$$

وفي حالة المتغيرات المتصلة:

$$\text{تبا (س)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{س} - \text{ت (س)})^{٢} \text{ ح (س) د س}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{٢} \text{ ح (س) د س} - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \text{س ح (س) د س} \right\}^{٢}$$

$$= \mu'_{٢} - \mu'^{٢}_{١} \qquad (٣ ـ ٣ ـ ١٥)$$

وبشكل عام فإن التباين يعرف كما يلي:

$$\text{تبا (س)} = \mu_{٢} = \text{ت} \left( \text{س} - \text{ت (س)} \right)^{٢}$$

$$= \text{ت (س}^{٢}) - \{ \text{ت (س)} \}^{٢} \qquad (٣ ـ ٣ ـ ١٦)$$

ويمكن تلخيص خواص دليل التباين على النحو التالي:

١ ـ إذا كانت أ قيمة ثابتة فإن تبا (أ) = صفر

٢ ـ إذا كان لدينا المتغير العشوائي س وضربنا كل قيمة من قيم هذا المتغير بالثابت أ فإن تبا (أ س) = أ$^{٢}$ تبا (س)

٣ ـ إذا كان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ متغيرين عشوائيين مستقلين فإن

$$\text{تبا} (س_{١} \pm س_{٢}) = \text{تبا} (س_{١}) + \text{تبا} (س_{٢})$$

وبشكل عام إذا كان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . . . ، $س_{ن}$ متغيرات عشوائية مستقلة فإن:

$$\text{تبا} (س_{١} \pm س_{٢} \pm \ldots\ldots \pm س_{ن}) =$$

$$\text{تبا} (س_{١}) + \text{تبا} (س_{٢}) \ldots\ldots + \text{تبا} (س_{ن})$$

٤ ـ إذا كان المتغيران العشوائيان $س_١$ ، $س_٢$ غير مستقلين فإن

$$تبا (س_١ \pm س_٢) = تبا (س_١) + تبا (س_٢) \pm ٢ \; تغا (س_١ ، س_٢)$$

حيث تغا ترمز للتغاير بين $س_١$ ، $س_٢$ والتي يأتي بحثها مباشرة بعد دليل التباين

**(٣ ـ ٣ ـ ٣) دليل التغاير**

يعبّر التغاير عن مقدار الإرتباط بين $س_١$ ، $س_٢$، ويمكن تعريفه على النحو التالي:

في حالة المتغيرات المتقطعة:

$$تغا (س_١ ، س_٢) = \underset{ر}{مجـ} \; \underset{و}{مجـ} \Big(ر - ت (س_١)\Big) \Big(و - ت (س_٢)\Big)$$

$$ح (س_١ = ر ، س_٢ = و) \qquad (٣ - ٣ - ١٧)$$

وفي حالة المتغيرات المتصلة فإن:

$$تـغـا (س_١ ، س_٢) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(س_١ - ت (س_١)\Big) \Big(س_٢ - ت (س_٢)\Big)$$

$$ح (س_١ ، س_٢) \; د س_١ \; د س_٢ \qquad (٣ - ٣ - ١٨)$$

وبشكل عام فإنه يمكن كتابة تعريف التغاير على الصورة التالية:

$$تغا (س_١ ، س_٢) = ت \Big(س_١ - ت (س_١)\Big) \Big(س_٢ - ت (س_٢)\Big)$$

$$= ت (س_١ \; س_٢) - ت (س_١) \; ت (س_٢) \qquad (٣ - ٣ - ١٩)$$

وإذا كان $س_١$ ، $س_٢$ مستقلين فإن

$$تغا (س_١ ، س_٢) = صفر$$

١ ـ إذا كان لدينا متغير عشوائي س فأن

$$تغا (س ، س) = تبا (س)$$

٢ ـ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ متغيرين عشوائيين فإن:

$$تغا (أ س_١ ، ب س_٢) = أ ب \; تغا (س_١ ، س_٢)$$

٣ ـ إذا كان س متغيراً عشوائياً و أ قيمة ثابتة فإن

$$تغا (س ، أ) = صفر$$

٤ ـ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ متغيرات عشوائية فإن

$$تغا (س_١ + س_٢ ، س_٣) = تغا (س_١ ، س_٣) + تغا (س_٢ ، س_٣)$$

٥ ـ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ متغيرين عشوائيين فإن معامل ارتباط بيرسون $\rho$ بينهما يعرّف على النحو التالي:

$$\rho = \frac{تغا (س_١ ، س_٢)}{\sqrt{تبا (س_١)\ تبا (س_٢)}} \qquad (٢٠ ـ ٣ ـ ٣)$$

وإذا أخذنا عينة من أزواج القيم المتناظرة من مجتمعين مستقلين س ، ص وكانت أزواج القيم المتناظرة: $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$ ، ..... ، $(س_ن ، ص_ن)$ فإن معامل ارتباط بيرسون محسوباً من المشاهدات:

$$ر = \frac{\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{\sqrt{\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢ \cdot \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢}}$$

$$= \frac{\text{تغاير س ، ص من بيانات العينتين المتناظرتين}}{\sqrt{\text{تباين العينة الأولى} \times \text{تباين العينة الثانية}}} \qquad (٢١ ـ ٣ ـ ٣)$$

# الفصل الرابع

## الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function

بالإضافة إلى أهمية العزوم في قياس الإلتواء والتفرطح فإنه يمكن تحديد كثافة الاحتمال لمتغير معين إذا علمنا كل أو بعض عزوم هذا المتغير.

فإذا كان لدينا متغير عشوائي س دالة كثافة احتماله ح (س) فإن القيمة المتوقعة للمقدار $هـ^{ت س}$ يسمى الدالة المولدة للعزوم إذا كانت هذه القيمة المتوقعة موجودة في فترة ما $-ل^{٢} < ت < ل^{٢}$ وسوف نرمز للدالة المولدة للعزوم بالرمز $\mu$ (ت) حيث أن:

في حالة المتغيرات المتقطعة

$$\mu \text{ (ت)} = \sum_{\text{ر}} هـ^{\text{ت ر}} \text{ ح (س = ر)} \qquad (٣ - ٤ - ٢٢)$$

وفي حالة المتغيرات المتصلة

$$\mu \text{ (ت)} = \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{\text{ت س}} \text{ ح (س) د س} \qquad (٣ - ٤ - ٢٣)$$

فإن وجدت الدالة المولدة للعزوم فإنها تكون قابلة للتفاضل في الفترة المحيطة بنقطة الاصل وإذا فاضلنا هذه الدالة و مرة بالنسبة لـ ت فإننا نحصل على:

$$\frac{د^{و}}{د ت^{و}} \mu \text{ (ت)} = \sum_{\text{ر}} \text{ر}^{و} هـ^{\text{ت ر}} \text{ ح (س = ر)} \qquad (٣ - ٤ - ٢٤)$$

في حالة المتغيرات المتقطعة.

$$\frac{د^{و}}{د ت^{و}} \mu \text{ (ت)} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{و} هـ^{\text{ت س}} \text{ ح (س) د س} \qquad (٣ - ٤ - ٢٥)$$

في حالة المتغيرات المتصلة.

وبوضع ت = صفر فإن

$$\frac{\text{د}^{\text{ر}}}{\text{د ت}^{\text{ر}}}\,\mu\,(\text{صفر}) = \sum_{\text{ر}}^{\infty} \text{ر}^{\text{ر}}\,\text{ح}\,(\text{س} = \text{ر}) = \mu'_{\text{ر}} \qquad (\text{٣ - ٤ - ٢٦})$$

في حالة المتغيرات المتقطعة.

$$\frac{\text{د}^{\text{ر}}}{\text{د ت}^{\text{ر}}}\,\mu\,(\text{صفر}) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{س}^{\text{ر}}\,\text{ح}\,(\text{س})\,\text{د س} = \mu'_{\text{ر}} \qquad (\text{٣ - ٤ - ٢٧})$$

في حالة المتغيرات المتصلة.

ويمكن الحصول على العزوم بإيجاد مفكوك الدالة المولدة للعزوم وذلك بالتعبير عنها بدلالة قوى ت التصاعدية على النحو التالي:

$$\mu\,(\text{ت}) = \sum_{\text{ر}}^{\infty} \text{هـ}^{\text{ر ت}}\,\text{ح}(\text{س} = \text{ر})$$

$$= \sum_{\text{ر}}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{ر ت}}{!1} + \frac{\text{ر}^{2}\,\text{ت}^{2}}{!2} + \ldots\right) \text{ح}\,(\text{س} = \text{ر})$$

$$(\text{٣ - ٤ - ٢٨})$$

في حالة المتغيرات المتقطعة.

$$\mu\,(\text{ت}) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{هـ}^{\text{س ت}}\,\text{ح}(\text{س})\,\text{د س}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\text{س ت}}{!1} + \frac{\text{س}^{2}\,\text{ت}^{2}}{!2} + \ldots\right) \text{ح}\,(\text{س})\,\text{د س}$$

$$(\text{٣ - ٤ - ٢٩})$$

في حالة المتغيرات المتصلة.

وإذا اخترنا ت في الفترة $-\text{ل}^{2} < \text{ت} < \text{ل}^{2}$ بشكل يجعل المتسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً فإن:

معامل $\frac{\text{ت}}{!1}$ هو العزم الأول حول الصفر

معامل $\frac{\text{ت}^{2}}{!2}$ هو العزم الثاني حول الصفر $\qquad (\text{٣ - ٤ - ٣٠})$

وهكذا.

مثال (١)

إذا اعتبرنا دالة كثافة إحتمال بواسون فإن الدالة المولدة للعزوم ومفكوكها يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\mu\,(ت) = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} هـ^{رت}\, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

$$= \sum_{ر=\cdot}^{\infty} \left( ١ + \frac{ت\,ر}{١!} + \frac{ت^{٢}ر^{٢}}{٢!} + \ldots \right) هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

والعزم الواوي حول الصفر $\mu'_{و}$ هو معامل $\frac{ت^{و}}{و!}$ ، أي أن

$$\mu'_{١} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر\, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

$$\mu'_{٢} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر^{٢}\, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

$$\mu'_{٣} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر^{٣}\, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

$$\mu'_{٤} = \sum_{ر=\cdot}^{\infty} ر^{٤}\, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

وباستخدام العلاقات (٧ ـ ٢ ـ ٣) ، (٨ ـ ٢ ـ ٣) و (٩ ـ ٢ ـ ٣) ومن ثم التعويض في (١٠ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\beta_{١} = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^{٣}}} = \frac{\theta}{\theta^{٣/٢}} = \frac{١}{\sqrt{\theta}}$$

وإذا عوضنا في (٢٢ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\beta_{٢} = \frac{\theta(١ + ٢\theta)}{\theta^{٢}} = \frac{١}{\theta} + ٣$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \beta_{١} = \text{صفر}$$

$$\lim_{\theta \to \infty} \beta_{٢} = ٣$$

أي أن شكل التوزيع يقرب من التوزيع الطبيعي كلما زادت قيمة $\theta$.

مثال (٢)

إذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال

$$ح(س ؛ \theta) = \frac{١}{\theta} \text{ ، صفر} < س < \theta$$

$$= \text{صفر فيما عدا ذلك}$$

فإن $\mu$ (ت) $= \int_{صفر}^{\theta} هـ^{ت س} \frac{١}{\theta}$ د س

$$= \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} هـ^{ت س} \text{ د س}$$

$$= \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} \left(١ + \frac{ت س}{١ !} + \frac{ت^٢ س^٢}{٢ !} + \ldots\right) \text{ د س}$$

$$\mu'_١ = \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} س \text{ د س} = \frac{\theta}{٢}$$

$$\mu'_٢ = \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} س^٢ \text{ د س} = \frac{١}{\theta} \left[\frac{س^٣}{٣}\right]_{صفر}^{\theta} = \frac{\theta^٢}{٣}$$

$$\mu'_٣ = \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} س^٣ \text{ د س} = \frac{١}{\theta} \left[\frac{س^٤}{٤}\right]_{صفر}^{\theta} = \frac{\theta^٣}{٤}$$

$$\mu'_٤ = \frac{١}{\theta} \int_{صفر}^{\theta} س^٤ \text{ د س} = \frac{١}{\theta} \left[\frac{س^٥}{٥}\right]_{صفر}^{\theta} = \frac{\theta^٤}{٥}$$

وبشكل عام فإن $\mu'_و = \frac{\theta^و}{و + ١}$

وباستخدام العلاقات (٧ ـ ٢ ـ ٣) ، (٨ ـ ٢ ـ ٣) و (٩ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\mu_٢ = \frac{\theta^٢}{١٢} \text{ ، } \mu_٣ = - \frac{\theta^٣}{٨} \text{ ، } \mu_٤ = \frac{\theta^٤}{٨٠}$$

وبالتعويض في (١٠ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\beta_١ = \frac{- \frac{\theta^٣}{٨}}{\sqrt{\left(\frac{\theta^٢}{١٢}\right)^٣}} = - ٣ \sqrt{٣}$$

وإذا عوضنا في (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن $\beta_٢ = \frac{\theta^٤}{٨٠} \div \left(\frac{\theta^٢}{١٢}\right)^٢ = ١,٨$

## أسئلة وتمارين (٣)

(١ ـ ٣) الجدول التالي يبيّن توزيع ١٠٠ أسرة في مدينة ما حسب عدد أفراد الأسرة (عدد أفراد الأسرة ر ، ر = ٢ ، ٣ ، ... ، ٨):

| عدد أفراد الأسرة | عدد الأسر |
|---|---|
| ٢ | ٥ |
| ٣ | ١٢ |
| ٤ | ١٨ |
| ٥ | ٣٠ |
| ٦ | ١٥ |
| ٧ | ١٣ |
| ٨ | ٧ |
| المجموع | ١٠٠ |

والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا التوزيع التكراري وعرض بيانات التوزيعين بأشكال هندسية مناسبة.

(٢ ـ ٣) الجدول التكراري التالي يبين توزيع أسابيع سنة ١٩٨٤ (وعددها ٥٢ أسبوعاً) حسب عدد حوادث العمل التي وقعت في الأسبوع في مصنع معين:

| عدد حوادث العمل في الأسبوع | عدد الأسابيع |
|---|---|
| صفر | ٣٧ |
| ١ | ٨ |
| ٢ | ٤ |
| ٣ | ٢ |
| ٤ فأكثر | ١ |
| المجموع | ٥٢ |

والمطلــوب:

١ ـ إيجاد التوزيع الاحتمالي.

٢ ـ رسم التوزيع الاحتمالي وبيان كيفية تحويله إلى مدرج تكراري.

٣ - إيجـاد التوزيـع التكراري المجتمـع الصـاعـد والتـوزيـع التكـراري المتجمع الهابط ورسم كل منهما.

٤ - إيجاد التوزيع الاحتمالي المتجمع لصاعد والتوزيع الاحتمالي المتجمـع الهابط ورسم كل منهما.

وإذا اعتبرنا أي أسبوع من أسابيع سنة ١٩٨٥ وفـرضنا أن ظـروف العمل في هذه السنةبقيت على ما كانت عليه سنة ١٩٨٤، أوجد:

١ ـ احتمال أن يكون من الأسابيع التي لا يقع فيها حوادث عمل.

٢ ـ احتمال أن يكون من الأسابيع التي يقع فيها حادثين فأكثر.

٣ ـ احتمال أن يكون من الأسابيع التي يقع فيها أقل من حادثين.

٤ - إحتمال أن يكون من الأسابيع التي يقـع فيها أكـثر من حادث واحـد وأقل من ٤ حوادث.

(٣ ـ ٣) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي س على النحو التالي:

ح (س) = س      صفر < س < ١

= ك(١ - ½ س)      ١ < س < ٢

= صفر      فيما عدا ذلك

والمطلوب:

١ ـ حساب قيمة الثابت ك

٢ ـ رسم دالة كثافة الاحتمال

٣ ـ إيجاد دالة الاحتمال التجميعي ورسم هذه الدالة

٤ ـ إيجـاد: ح (س < ٠,٢)، ح (س > ١,٣)، ح (١,٢ < س < ٢).

(٤ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال:

ح (س) = أ س (١ - س$^{٢}$)      صفــر < س < ١

= صفر      فيما عدا ذلك

أوجـد:

١ ـ قيمة الثابت أ، ومن ثم ارسم دالة كثافة الاحتمال.
٢ ـ ح (س > ½)
٣ ـ القيمة المتوقعة للمتغير س
٤ ـ الوسيط للمتغير س
٥ ـ دالة الاحتمال التجميعي للمتغير س ومن ثم ارسم هذه الدالة.

(٥ ـ ٣) اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٢١ أسرة من بين الأسر التي تقطن في منطقة معينة وقد تبيّن أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية للأسر في العينة كما يلي:

| فئات الدخل الشهري بالدينار | عدد الأسر |
|---|---|
| ١٠٠ ـ ٢٠٠ | ١٠ |
| ٢٠٠ ـ ٣٠٠ | ١٦ |
| ٣٠٠ ـ ٤٠٠ | ٦٤ |
| ٤٠٠ ـ ٥٠٠ | ١٧ |
| ٥٠٠ ـ ٦٠٠ | ١٤ |
| المجموع | ١٢١ |

والمطلوب:

١ ـ رسم المدرج التكراري.
٢ ـ إيجاد التوزيع الاحتمالي، ومن ثم رسم هذا التوزيع.
٣ ـ إيجاد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والتوزيع التكراري المتجمع الهابط ورسم كل منهما.
٤ - إيجاد التوزيع الاحتمالي المتجمع الصاعد والتوزيع الاحتمالي المتجمع الهابط ورسم كل منهما.

وإذا اخترنا عشوائياً أسرة واحدة من هذه العينة:

١ ـ ما احتمال أن تكون من الأسر التي يزيد دخلها عن ٤٠٠ دينار
٢ ـ ما احتمال أن تكون من الأسر التي يقل دخلها عن ٤٠٠ دينار

٣ - ما احتمال أن تكون من الأسر التي لا يقل دخلها عن ٢٠٠دينار ولا يزيد عن ٤٠٠ دينار.

(٣ - ٦) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع احتمالي على الشكل التالي:

| ر | : | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ح (س = ر) | : | $\frac{١}{٨}$ | $\frac{١}{٦}$ | $\frac{٣}{٨}$ | $\frac{١}{٤}$ | $\frac{١}{١٢}$ |

أوجـد:

ت (س) ، ت (س$^{٢}$) ، ت (س - ت (س))$^{٢}$

(٣ - ٧) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الاحتمال

ح (س) = أ (س + ٣) ٢ < س < ٨

= صفر فيما عدا ذلك

أوجـد:

١ - قيمة الثابت أ

٢ - ح (٣ < س < ٥)

٣ - ح (س ≤ ٤)

٤ - ح (| س - ٥ | < ½)

(٣ - ٨) إذا كان المتغير س يأخذ القيم - ٢ ، ٢، ٣ باحتمالات

$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ على التوالي

أوجـد ت (س) ، ت (٣ س + ٥)

(٣ - ٩) إذا كان لدينا الدالة

د (س) = $\frac{١}{٩}$ س$^{٢}$ صفر < س < ٣

= صفر فيما عدا ذلك

١ - أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة احتمال ثم أوجد دالة الاحتمال التجميعي.

٢ ـ أرسم دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعي.

٣ ـ أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغير س.

(١٠ ـ ٣) إذا كان المتغير س له دالة كثافة الاحتمال:

$$ح (س) = \frac{٢}{\pi (١ + س^{٢})} ، - ١ < س < ١$$

= صفر فيما عدا ذلك

١ ـ أوجد داله الاحتمال التجميعي

٢ ـ أوجد ت (س) ، ت ($س^{٢}$) ، ت ($س^{٣}$) ، ت ($س^{٤}$)

٣ ـ أوجد معاملي الالتواء والتفرطح.

(١١ ـ ٣) إذا كان الطلب اليومي س على سلعة ما (بالمئة كيلوغرام) يتبع توزيعاً بدالة كثافة احتمال.

| | |
|---|---|
| ح (س) = ٣ $س^{٢}$ | صفر < س < ١ |
| = صفر | فيما عدا ذلك |

وأراد صاحب بقالة أن يطلب ١٠٠ ك كغم من هذه السلعة، أوجد قيمة ك التي تجعل الأرباح نهاية عظمى إذا كان يشتري الكيلوغرام الواحد بستة قروش ويبيعه بعشرة قروش.

(١٢ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثالة الاحتمال:

$$ح (س) = \frac{م\ س^{م-١}}{\alpha} هـ^{-\frac{س^{م}}{\alpha}} \qquad صفر < س < \infty$$

$$\alpha > صفر$$

$$م > صفر$$

(يسمى المتغير الذي له دالة كثافة الاحتمال على هذا الشكل Weibul random variable وتعتبر هذه الدالة نموذجاً جيداً لتوزيع فترة البقاء Length of Life لكثير من الأدوات الكهربائية والميكانيكية والنباتات والحيوانات)

أوجد القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع إذا علم أن م = ٢

(١٣ ـ ٣) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الاحتمال

| | |
|---|---|
| ح (س) = أ س | صفر < س < ٢ |
| = صفر | فيما عدا ذلك |

أوجد الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى لهذا المتغير

(١٤ ـ ٣) إذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = ٠,٢      - ١ < س < صفر

= ٠,٢ + أ س      صفر < س < ١

= صفر      فيما عدا ذلك

١ ـ أوجد قيمة الثابت أ

٢ ـ أوجد دالة كثافة الاحتمال

٣ ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعي

٤ ـ أرسم كلاً من دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعي.

٥ ـ أوجد ح (صفر < س ≥ ٠,٥)

٦ ـ أوجد ح (س > ٠,٥ | س > ٠,١)

# الباب الرابع

## التوزيعات الإحصائية Statistical Distributions

تقسم التوزيعات الإحصائية إلى مجموعتين:

أولاً: توزيعات إحصائية متقطعة Discrete Statistical Distributions

ثانياً: توزيعات إحصائية متصلة Continuous Statistical Distributions

وسوف نبدأ بدراسة التوزيعات الإحصائية المتقطعة.

# الفصل الأول

## التجارب المتكررة المستقلة وغير المستقلة

## Repeated Independent and Dependent Trials

التجارب المتكررة المستقلة هي التي تُجرى تحت نفس الظروف واحتمال الحصول على صفة معينة لا يتغير من تجربة إلى أخرى. أما التجارب المتكررة غير المستقلة فهي التي تجرى تحت ظروف مختلفة واحتمال الحصول على صفة معينة في تجربة ما يختلف عن احتمال الحصول على نفس الصفة في تجربة أخرى. وتسمى التجارب المتكررة المستقلة في كثير من الأحيان المعاينة مع الإعادة Sampling with Replacement أما التجارب المتكررة غير المستقلة فإنها تسمى المعاينة بدون إعادة Sampling without Replacement فإذا كان يوجد كيس به ن كرة متماثلة منها $ن_1$ كرة بيضاء، $ن_2$ كرة حمراء، $ن_3$ كرة خضراء وسحبنا كرة عشوائياً ثم أعدناها إلى الكيس بعد تسجيل لونها فإن التجارب في هذه الحالة تسمى تجارب متكررة مستقلة واحتمال الحصول على لون معين لا يختلف من تجربة إلى أخرى، أما إذا سحبنا كرة من الكيس وسجلنا لونها ووضعناها جانباً قبل سحب الكرة الثانية فإن هذا النوع من التجارب يسمى تجارب متكررة غير مستقلة واحتمال الحصول على لون معين يختلف من تجربة إلى أخرى لأنه يعتمد على ما يظهر من التجارب السابقة وعدد الكرات الباقي في الكيس.

ويمكن حساب إحتمال النتائج لهذه التجارب المتكررة باستخدام المبادىء الأساسية في علم الاحتمال، إلا أنه يمكن إيجاد قانون عام يعطي احتمال أي من هذه النتائج بمجرد التعويض فيه.

### (١ ـ ١ ـ ٤) إيجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة المستقلة

### قانون ذي الحدين أو توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

إذا أجرينا تجربة معينة وكانت نتيجة هذه التجربة وقوع حادث باحتمال ح أو

.عدم وقوعه باحتمال (١ - ح) فنحن بصدد تجارب برنوللي والتي يحكمها التوزيع الاحتمالي المسمى توزيع ذي الحدين. فإذا أجرينا التجربة ن مرة فإن احتمال وقوع الحادث ر مرة (صفر ⩽ ر ⩽ ن) يمكن حسابه على النحو التالي:

إن عدد الطرق التي يقع فيها الحادث ر مرة في ن تجربة يساوي $^{ن}ق_{ر}$، فإذا اعتبرنا الحالة التي يقع فيها الحادث في كل تجربة من التجارب الأولى التي عددها ر ولا يقع في كل تجربة من التجارب التالية وعددها ن - ر فإن احتمال الحصول على هذه الحالة هو:

$$\underbrace{(ح \times ح \times \ldots \times ح)}_{\text{ر مرة}} \underbrace{(١ - ح)(١ - ح) \ldots (١ - ح)}_{\text{ن - ر مرة}}$$

$$= ح^{ر} (١ - ح)^{ن - ر}$$

وبما أن عدد الطرق التي يقع فيها الحادث تشكل حالات متنافية ومتماثلة فإن الاحتمال المطلوب يمكن صياغته على النحو التالي:

$$ح (س = ر) = {}^{ن}ق_{ر} ح^{ر} (١ - ح)^{ن - ر} \qquad (١ - ١ - ٤)$$

حيث س ترمز لمتغير ذي الحدين وهو عبارة عن عدد مرات وقوع الحادث.

**نتائج وخواص:**

١ - إذا اعتبرنا المقدار $\{ح + (١ - ح)\}^{ن}$ حيث ن عدد صحيح موجب فإن الحد الذي ترتيبه ر + ١ في مفكوك هذا المقدار هو $^{ن}ق_{ر} ح^{ر} (١ - ح)^{ن - ر}$ وهو الاحتمال الذي حصلنا عليه في صيغة توزيع ذي الحدين ومن هنا نشأت تسمية هذه الصيغة الاحتمالية بالقانون الاحتمالي ذي الحدين.

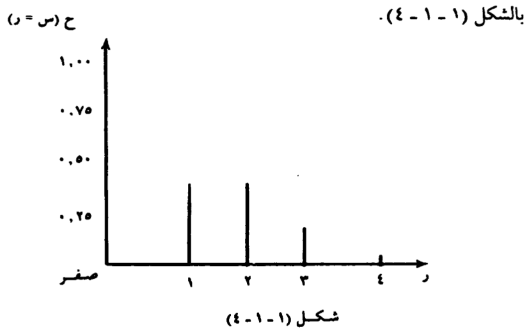
٢ - عدد مرات وقوع الحادث يأخذ القيم صفر أو ١ أو ٢ أو . . . أو ن وهي حالات متنافية وشاملة.

$$\therefore ح (س = ٠) + ح (س = ١) + \ldots + ح (س = ن) = ١$$

٣ - دالة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين تعتمد على ثابتين Constants أو معلمتين Parameters ح، ن، وبتغيرهما فإننا نحصل على أشكال مختلفة لهذا التوزيع. فإذا فرضنا أن ح = ٠,٤ ، ن = ٤ فإن التوزيع الاحتمالي في هذه الحالة هو:

| ر | ح (س = ر) |
|---|---|
| ٠ | $^{٤}$ق$_{٠}$ (٠,٤)$^{٠}$ (٠,٦)$^{٤}$ = ٠,١٢٩٦ |
| ١ | $^{٤}$ق$_{١}$ (٠,٤)$^{١}$ (٠,٦)$^{٣}$ = ٠,٣٤٥٦ |
| ٢ | $^{٤}$ق$_{٢}$ (٠,٤)$^{٢}$ (٠,٦)$^{٢}$ = ٠,٣٤٥٦ |
| ٣ | $^{٤}$ق$_{٣}$ (٠,٤)$^{٣}$ (٠,٦)$^{١}$ = ٠,١٥٣٦ |
| ٤ | $^{٤}$ق$_{٤}$ (٠,٤)$^{٤}$ (٠,٦)$^{٠}$ = ٠,٠٢٥٦ |
| المجموع | ١,٠٠٠٠ |

ودالة الاحتمال في هذه الحالة تكون ملتوية ناحية اليمين كما هـو مبين بالشكل (١ - ١ - ٤).

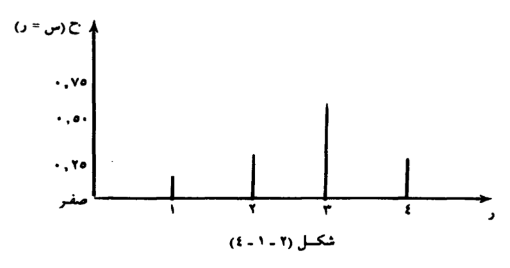



شكـل (١ - ١ - ٤)

أما إذا كانت ح = ٠,٧ ، ن = ٤ فإن التوزيـع الاحتمالي في هـذه الحالـة هو:

| ر | ح (س = ر) |
|---|---|
| ٠ | $^{٤}$ق$_{٠}$ (٠,٧)$^{٠}$ (٠,٣)$^{٤}$ = ٠,٠٠٨١ |
| ١ | $^{٤}$ق$_{١}$ (٠,٧)$^{١}$ (٠,٣)$^{٣}$ = ٠,٠٧٥٦ |
| ٢ | $^{٤}$ق$_{٢}$ (٠,٧)$^{٢}$ (٠,٣)$^{٢}$ = ٠,٢٦٤٦ |
| ٣ | $^{٤}$ق$_{٣}$ (٠,٧)$^{٣}$ (٠,٣)$^{١}$ = ٠,٤١١٦ |
| ٤ | $^{٤}$ق$_{٤}$ (٠,٧)$^{٤}$ (٠,٣)$^{٠}$ = ٠,٢٤٠١ |
| المجموع | ١,٠٠٠٠ |

ودالة الاحتمال ملتوية ناحية اليسار كما هو مبين بالشكل (٢ ـ ١ ـ ٤)

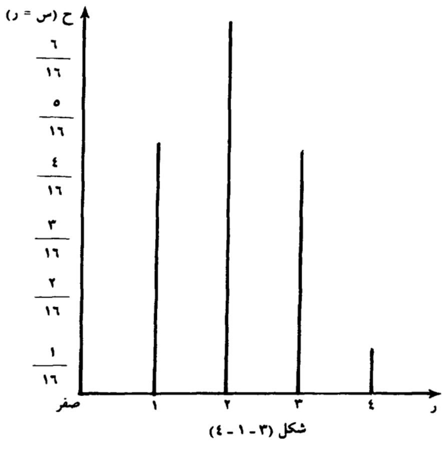



شكـل (٢ ـ ١ ـ ٤)

٤ ـ إذا كـانت ح = ½ فـإ ح (س = ر) = ح (س = ن - ر)، وهــذا يعني أن الدالة متماثلة، فإذا كانت ح = ½ ن = ٤ فإن التوزيع الاحتمالي هو:

| ر | ح (س = ر) | |
|---|---|---|
| ٠ | $^{٤}ق_{٠}$ (½)$^{٠}$ (½)$^{٤}$ = | $\frac{١}{١٦}$ |
| ١ | $^{٤}ق_{١}$ (½)$^{١}$ (½)$^{٣}$ = | $\frac{٤}{١٦}$ |
| ٢ | $^{٤}ق_{٢}$ (½)$^{٢}$ (½)$^{٢}$ = | $\frac{٦}{١٦}$ |
| ٣ | $^{٤}ق_{٣}$ (½)$^{٣}$ (½)$^{١}$ = | $\frac{٤}{١٦}$ |
| ٤ | $^{٤}ق_{٤}$ (½)$^{٤}$ (½)$^{٠}$ = | $\frac{١}{١٦}$ |
| المجموع | | ١ |

ودالة الاحتمال متماثلة حول ح (س = ٢) كما هو مبين في الشكل (٣ـ١ـ٤)



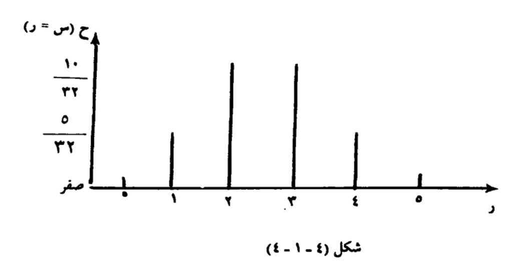

شكل (٣ - ١ - ٤)

أما إذا كانت ح = ½ ، ن = ٥ فإن التوزيع الاحتمالي هو:

| ر | ح (س = ر) | | |
|---|---|---|---|
| ٠ | $^{٥}ق_{٠} (½)^{٠} (½)^{٥}$ | = | $\frac{١}{٣٢}$ |
| ١ | $^{٥}ق_{١} (½)^{١} (½)^{٤}$ | = | $\frac{٥}{٣٢}$ |
| ٢ | $^{٥}ق_{٢} (½)^{٢} (½)^{٣}$ | = | $\frac{١٠}{٣٢}$ |
| ٣ | $^{٥}ق_{٣} (½)^{٣} (½)^{٢}$ | = | $\frac{١٠}{٣٢}$ |
| ٤ | $^{٥}ق_{٤} (½)^{٤} (½)^{١}$ | = | $\frac{٥}{٣٢}$ |
| ٥ | $^{٥}ق_{٥} (½)^{٥} (½)^{٠}$ | = | $\frac{١}{٣٢}$ |

ودالة الاحتمال متماثلة حول ح (س = ٣) ، ح (س = ٤) كما هو مبين

الشكل (٤ - ١ - ٤)




شكل (٤ ـ ١ ـ ٤)

٥ ـ إذا أجرينا تجربة برنوللي مرة واحدة فإن المتغير س في هذه الحالة يأخذ القيمة ١ (وقوع الحادث) باحتمال ح أو القيمة صفر (عدم وقوع الحادث) باحتمال (١ − ح)
وفي هذه الحالة فإن:

ح (س = ر) = $ح^{ر}$ $(١ - ح)^{١ - ر}$ ، ر = صفر ، ١ (٢ ـ ١ ـ ٤)

ويسمى هذا التوزيع Point Binomial

٦ ـ إذا كانت ن كبيرة وكانت ح ، ١ − ح غير قريبتين جداً من الصفر فإنه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي وسوف ندرس هذا التقريب عندما نأتي إلى التوزيع الطبيعي.

٧ ـ المنوال لتوزيع ذي الحدين هو القيمة التي تجعل المقدار ح (س = ر) نهاية عظمى، ويمكن تحديد قيمة المنوال على النحو التالي:
إذا فرضنا م، ك هما القيمتين العددية والكسرية للمقدار (ن + ١) ح فإن قيمة دالة الاحتمال لهذا التوزيع تكون أكبر ما يمكن إذا كانت س=م وعلى هذا فإن م هي القيمة المنوالية. ومثالاً على ذلك إذا كانت ن = ٧، ح = ٠.٣ فإن (٧ + ١) ٠,٣ = ٢,٤ ، م = ٢، ك = ٠,٤ ، ∴ المنوال = ٢.

**معاملات توزيع ذي الحدين ومثلث باسكال:**

**Coefficients of the Binomial and Pascal's Triangle:**

يمكن الحصول على المعاملات من مفكوك ذي الحدين للمقدار
$\{ح + (١ - ح)\}^{ن}$ ، مع ملاحظة أن:

١ ـ عدد الحدود في هذا المفكوك هو ن + ١

٢ ـ قوى ح هي ٠، ١، ٢، . . .، ن على التوالي وقوى ١ − ح) هي ن، ن − ١، . . .، ١، ٠ على التوالي.

٣ ـ مجموع قوى ح و (١ − ح) يساوي ن.

٤ ـ المعاملات متماثلة تزداد قيمتها باتجاه منتصف المتسلسلة وتتناقص بعد ذلك، فإذا فرضنا أن ن = ١٠ فإنه يمكن وضع معاملات مفكوك ذي الحدين للمقدار ح + (١ − ح) في مثلث باسكال على النحو التالي:

| عدد مرات اجراء التجربة | معاملات ذي الحدين | المجموع |
|---|---|---|
| ١ | ١ ١ | ٢ |
| ٢ | ١ ٢ ١ | ٤ |
| ٣ | ١ ٣ ٣ ١ | ٨ |
| ٤ | ١ ٤ ٦ ٤ ١ | ١٦ |
| ٥ | ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١ | ٣٢ |
| ٦ | ١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١ | ٦٤ |
| ٧ | ١ ٧ ٢١ ٣٥ ٣٥ ٢١ ٧ ١ | ١٢٨ |
| ٨ | ١ ٨ ٢٨ ٥٦ ٧٠ ٥٦ ٢٨ ٨ ١ | ٢٥٦ |
| ٩ | ١ ٩ ٣٦ ٨٤ ١٢٦ ١٢٦ ٨٤ ٣٦ ٩ ١ | ٥١٢ |
| ١٠ | ١ ١٠ ٤٥ ١٢٠ ٢١٠ ٢٥٢ ٢١٠ ١٢٠ ٤٥ ١٠ ١ | ١٠٢٤ |

ويلاحظ أن كل قيمة في هذا المثلث عبارة عن حاصل جمع القيمتين على زاويتيها في السطر السابق مباشرة.

**العزوم ومعاملي الالتواء والتفرطح لتوزيع ذي الحدين**

باستخدام المعادلات (٢ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\mu'_1 = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ر}\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{ح}^{\text{ر}} (1 - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}} = \text{ن ح}$$

$$\mu'_2 = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ر}^2\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{ح}^{\text{ر}} (1 - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \{\text{ر}(\text{ر}-1)+\text{ر}\}\ {}^{\text{ن}}\text{قر}\ \text{ح}^{\text{ر}}(1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{ن}(\text{ن}-1)\text{ح}^2 + \text{ن ح}$$

$$\mu'_3 = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ر}^3\ {}^{\text{ن}}\text{قر}\ \text{ح}^{\text{ر}}(1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2) + 3\,\text{ر}(\text{ر}-1) + \text{ر}\}\ {}^{\text{ن}}\text{قر}\ \text{ح}^{\text{ر}}(1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\text{ح}^3 + 3\,\text{ن}(\text{ن}-1)\text{ح}^2 + \text{ن ح}$$

$$\mu'_4 = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ر}^4\ {}^{\text{ن}}\text{قر}\ \text{ح}^{\text{ر}}(1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \{\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2)(\text{ر}-3) + 6\,\text{ر}(\text{ر}-1)(\text{ر}-2) + 7\,\text{ر}(\text{ر}-1) + \text{ر}\}\ {}^{\text{ن}}\text{قر}\ \text{ح}^{\text{ر}}(1-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)\text{ح}^4 + 6\,\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\text{ح}^3 + 7\,\text{ن}(\text{ن}-1)\text{ح}^2 + \text{ن ح}$$

وبالتعويض في (٧ ـ ٢ ـ ٣)، (٨ ـ ٢ ـ ٣) و (٩ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\mu_2 = \text{ن ح}(1-\text{ح})$$

$$\mu_3 = \text{ن ح}(1-\text{ح})(1-2\text{ح})$$

$$\mu_4 = 3\,\text{ن}^2\text{ح}^2(1-\text{ح})^2 + \text{ن ح}(1-\text{ح})\{1-6\text{ح}(1-\text{ح})\}$$

وإذا عوضنا عن العزوم حول الوسط الحسابي في العلاقتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣)، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\beta_1 = \frac{\text{ن}^2\text{ح}^2(1-\text{ح})^2(1-2\text{ح})^2}{\text{ن}^3\text{ح}^3(1-\text{ح})^3} = \frac{(1-2\text{ح})^2}{\text{ن ح}(1-\text{ح})}$$

$$\beta_2 = \frac{3\,\text{ن}^2\text{ح}^2(1-\text{ح})^2 + \text{ن ح}(1-\text{ح})\{1-6\text{ح}(1-\text{ح})\}}{\text{ن}^2\text{ح}^2(1-\text{ح})^2}$$

$$= 3 + \frac{1-6\text{ح}(1-\text{ح})}{\text{ن ح}(1-\text{ح})}$$

ويلاحظ أن $\beta_1$ = صفر إذا كانت ح = ½

$\beta_1$ ← صفر عندما ن ← ∞ حيث ح ثابتة وغير قريبة جداً من الصفر

كما أن $\beta_2$ ← ٣ عندما ن ← ∞ حيث ح ثابتة وغير قريبة جداً من الصفر

**القيمة المتوقعة والتباين لنسبة مرات وقوع الحادث:**

نسبة مرات وقوع الحادث هي $\frac{ر}{ن}$ حيث ر عدد مرات وقوع الحادث، ن عدد مرات إجراء التجربة:

$$ت\left(\frac{ر}{ن}\right) = \frac{١}{ن} ت (ر) = \frac{ن ح}{ن} = ح \qquad (٣ - ١ - ٤)$$

$$تبا\left(\frac{ر}{ن}\right) = \frac{١}{ن^٢} تبا (ر) = \frac{١}{ن^٢} ن ح (١ - ح) = \frac{ح (١ - ح)}{ن} \qquad (٤ - ١ - ٤)$$

**توفيق توزيع ذي الحدين** **Fitting a Binomial**

إذا وجد أنه من المناسب توفيق توزيع ذي الحدين لبيانات متغير معين، فإنه يلزم تحديد قيم ثوابت التوزيع من واقع البيانات المتوفرة وبالتالي التكرارات النسبية والمطلقة المقابلة لقيم هذا المتغير. أما اختبارات جودة المطابقة فإننا ندرسها مع تطبيقات توزيع كاي تربيع.

مثـــال:

إذا كان لدينا البيانات التالية عن عدد الأولاد الذكور في ١٠٠ عائلة حجم كل منها ٥ أفراد.

| عدد الذكور | عدد العائـلات |
|---|---|
| ٠ | ٧ |
| ١ | ١٨ |
| ٢ | ٢٨ |
| ٣ | ٢٧ |
| ٤ | ١٥ |
| ٥ | ٥ |
| المجمـوع | ١٠٠ |

فإنه يمكن توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات كما هو مبين في الجدول التالي مع العلم بأن احتمال أن يكون المولود ذكراً (ح) يساوي ½ وأن ن = ٥

| ر | عدد العائلات المشاهد | ح (س = ر) | عدد العائلات المتوقع |
|---|---|---|---|
| ٠ | ٧ | $ق^{٥}_{٠} (½)^{٠} (½)^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{١}{٣٢} = ٣$ |
| ١ | ١٨ | $ق^{٥}_{١} (½)^{١} (½)^{٤} = \frac{٥}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{٥}{٣٢} = ١٦$ |
| ٢ | ٢٨ | $ق^{٥}_{٢} (½)^{٢} (½)^{٣} = \frac{١٠}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{١٠}{٣٢} = ٣١$ |
| ٣ | ٢٧ | $ق^{٥}_{٣} (½)^{٣} (½)^{٢} = \frac{١٠}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{١٠}{٣٢} = ٣١$ |
| ٤ | ١٥ | $ق^{٥}_{٤} (½)^{٤} (½)^{١} = \frac{٥}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{٥}{٣٢} = ١٦$ |
| ٥ | ٥ | $ق^{٥}_{٥} (½)^{٥} (½)^{٠} = \frac{١}{٣٢}$ | $١٠٠ \times \frac{١}{٣٢} = ٣$ |

**جدول توزيع ذي الحدين:**

جدول رقم (١) يبين التوزيع الاحتمالي لمتغير يتبع توزيع ذي الحدين عندما ن = ٢، ٣، . . .، ٨ وقيم مختارة للمعلمة ح.

**تمارين محلولة على توزيع ذي الحدين:**

**تمرين (١)**

إذا وجد اضبارة بها ٢٥٠ فاتورة من بينها ٥ فواتير بها أخطاء، واختار فاحص الحسابات عشوائياً ٤ فواتير من هذه الاضبارة، أوجد:

١ ـ احتمال أن يوجد أخطاء في الفواتير الأربعة.

٢ ـ احتمال أن يوجد اخطاء في فاتورة واحدة على الأقل.

وإذا اخترنا عشوائياً ١٠٠ فاتورة من هذه الإضبارة، أوجد القيمة المتوقعة والتباين لعدد الفواتير التي بها أخطاء.

الحـــل:

احتمال أن نحصل على فاتورة بها أخطاء ح = $\frac{٥}{٢٥٠}$ = ٠,٠٢

وإذا رمزنا لعدد الفواتير التي بها أخطاء بالرمز س فإن:

١ - ح (س = ٤) = $^{٤}$ق$_{٤}$ (٠,٠٢)$^{٤}$ (٠,٩٨)$^{٠}$ = ٠,٠٠٠٠٠٠١٦

٢ - ح (س ≥ ١) = ١ - ح (س < ١)

= ١ - ح (س = صفر)

= ١ - $^{٤}$ق$_{٠}$ (٠,٠٢)$^{٠}$ (٠,٩٨)$^{٤}$

= ١ - ٠,٩٢٢٣٦٨١٦

= ٠,٠٧٧٦٣١٨٤

ت (س) = ١٠٠ × ٠,٠٢ = ٢

تبا (س) ١٠٠ × ٠,٠٢ × ٠,٩٨ = ١,٩٦

تمريـــن (٢):

إذا كـان احتمال وجـود عيب في وحدة من إنتـاج آلة معينـة هو ٠,٠٥ واختـرنا عشوائياً ٥ وحدات من إنتاج هذه الآلة، أوجـــد:

١ - احتمال عدم وحود عيب في جميع الوحدات المختارة.

٢ - احتمال وجود عيب في وحدتين من الوحدات المختارة.

٣ - احتمال وجود عيب في وحدة واحدة على الأكثر من الوحدات المختارة.

الحـــل:

إذا رمزنا لعدد الوحدات التي يوجد بها عيب بالرمز س فإن:

١ - ح (س = ٠) = $^{٥}$ق$_{٠}$ (٠,٠٥)$^{٠}$ (٠,٩٥)$^{٥}$ = ٠,٧٧٣٨

٢ - ح (س = ٢) = $^{٥}$ق$_{٢}$ (٠,٠٥)$^{٢}$ (٠,٩٥)$^{٣}$ = ٠,٠٠٢١

٣ - ح (س ≤ ١) = ح (س = ٠) + ح(س = ١)

= $^{٥}$ق$_{٠}$ (٠,٠٥)$^{٠}$ (٠,٩٥)$^{٥}$ + $^{٥}$ق$_{١}$ (٠,٠٥)$^{١}$ (٠,٩٥)$^{٤}$

= ٠,٩٧٧٤

تمرين (٣):

أثبتت الخبرة السابقـة أن نسبة صفحـات اليوميـة التي تحتوي عـلى أخطاء لـدى

شركة معينة هي ٥٪ فإذا أخذ مكتب مراجعة عينة مكونة من ٣ صفحات من دفتر يومية هذه الشركة، أوجـد:

١ ـ احتمال أن يجدها جميعاً بدون أخطاء.

٢ ـ احتمال أن يجد أخطاء في صفحة واحدة على الأقل.

الحـل:

إذا رمزنا لعدد صفحات اليومية التي بها أخطاء بالرمز س، فإن:

١ ـ ح (س = ٠) = $^{٣}$ق. (٠,٠٥)$^{٠}$ (٠,٩٥)$^{٣}$ = ٠,٨٥٧

٢ ـ ح (س ≥ ١) = ١ − ح (س < ١) = ١ − ح (س = ٠)

= ١ − ٠,٨٥٧ = ٠,١٤٣

تمريـن (٤):

في استقصاء للرأي العام في أحد المجتمعات، وجد أن نسبة من يوافقون على حل لمشكلة معينة هي ٠,٦٠، أوجـد:

١ ـ احتمال أن نجد في عينة من ٥ أشخاص ثلاثة منهم يوافقون على هذا الحل.

٢ ـ احتمال أن نجد في عينة من ٤ أشخاص واحداً منهم على الأقل يوافق على هذا الحل.

٣ ـ القيمة المتوقعة والتباين لعدد من يوافقون على الحل المذكور في عينة من ١٠٠ شخص.

٤ ـ القيمة المتوقعة والتباين لنسبة من يوافقون على الحل المذكور في عينة من ٥٠ شخص.

الحـل:

إذا رمزنا لعدد الأشخاص الذين يوافقون على الحل المذكور بالرمز س فإن:

١ ـ ح (س = ٣) = $^{٥}$ق$_{٣}$ (٠,٦٠)$^{٣}$ (٠,٤٠)$^{٢}$ = ٠,٥٧٨

٢ ـ ح (س ≥ ١) = ١ − ح (س < ١) = ١ − ح (س = صفر)

= ١ − $^{٤}$ق. (٠,٦٠)$^{٠}$ (٠,٤٠)$^{٤}$ = ١ − ٠,٠٢٥٦ = ٠,٩٧٤٤

٣ ـ ت (س) = ٥٠ × ٠,٦٠ = ٣٠

تبا (س) = ٥٠ × ٠,٦٠ × ٠,٤٠ = ١٢.

٤ - $\hat{ح} = \frac{ر}{ن}$

$$ت(\hat{ح}) \quad = ت\left(\frac{ر}{ن}\right) = \frac{ن ح}{ن} = ح = ٠,٦٠$$

$$تبا(\hat{ح}) \quad = تبا\left(\frac{ر}{ن}\right) = \frac{ن ح (١ - ح)}{ن^{٢}} = \frac{ح (١ - ح)}{ن}$$

$$= \frac{٠,٦٠ \times ٠,٤٠}{١٠٠} = ٠,٠٠٢٤$$

**(٢ - ١ - ٤) تعميم قانون ذي الحدين إلى توزيع متعدد الحدود**

**Multinomial Distribution**

إذا أجرينا تجربة معينة وكانت نتيجتها أحد الحوادث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، . . . $أ_{و}$ باحتمالات $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، . . . ، $ح_{و}$ على التوالي وأجرينا هذه التجربة ن مرة مستقلة ورمزنا لعدد مرات ظهور الحادث $أ_{١}$ بالرمز $س_{١}$ والحادث $أ_{٢}$ بالرمز $س_{٢}$ ، . . . ، والحادث $أ_{و}$ بالرمز $س_{و}$ فانه يمكن كتابة قانون التوزيع متعدد الحدود على النحو التالي:

$ح (س_{١} = ن_{١} ، س_{٢} = ن_{٢} ، . . . ، س_{و} = ن_{و}) =$

$$\frac{ن!}{ن_{١}! \; ن_{٢}! \; . . . \; ن_{و}!} ح_{١}^{ن_{١}} ح_{٢}^{ن_{٢}} . . . ح_{و}^{ن_{و}} \qquad (٥ - ١ - ٤)$$

حيث $ن_{١} + ن_{٢} + . . . + ن_{و} = ن$

$ح_{١} + ح_{٢} + . . . + ح_{و} = ١$

**مثـال:**

إذا كان لدينا كيس به ٦ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء، ١٠ كرات خضراء وسحبنا ١٠ كرات متتالية بحيث تعاد الكرة إلى الكيس بعد تسجيل لونها، فإنه يمكن إيجاد احتمال الحصول على ٣ كرات بيضاء، ٢ كرة حمراء، ٥ كرات خضراء على النحو التالي:

$$ح_{١} = \frac{٦}{٢٠} = ٠,٣٠ ، ح_{٢} = \frac{٤}{٢٠} = ٠,٢٠ ، ح_{٣} = \frac{١٠}{٢٠} = ٠,٥٠$$

وإذا رمزنا لعدد الكرات البيضاء بالرمز $س_{١}$ وعدد الكرات الحمراء بالرمز $س_{٢}$ وعدد الكرات الخضراء بالرمز $س_{٣}$ فإن:

$$ح(س_{١} = ٣ ، س_{٢} = ٢ ، س_{٣} = ٥) = \frac{١٠!}{٣! \; ٢! \; ٥!} (٠,٣٠)^{٣} (٠,٢٠)^{٢} (٠,٥٠)^{٥}$$

## (٣ - ١ - ٤) توزيع بواسون Poisson Distribution

ويسمى أحياناً بالتوزيع الاحتمالي للحوادث النادرة، فكثيراً ما يتفق مثلاً مع توزيع المساحات الصغيرة التي تقسم إليها شريحة عليها عينة من الدم بحسب عدد كرات الدم البيضاء، أو توزيع المساحات الصغيرة التي يقسم إليها لوح زجاجي بحسب عدد الحجارة الرملية التي تحتوي عليها المادة الزجاجية، أو عدد السيارات التي تمر في الدقيقة من مكان معين وفي وقت معين خلال اليوم، أو عدد المكالمات التلفونية التي ترد على لوحة استقبال خلال فترة زمنية قصيرة جداً في الفترة الواقعة ما بين الساعة الثامنة صباحاً والخامسة بعد الظهر، أو عدد الحالات في الساعة التي ترد على عيادة الطوارىء في مستشفى معين في الفترة الواقعة ما بين الساعة الثامنة صباحاً والثانية بعد الظهر. . . الخ.

وتوزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين ودالة كثافة احتماله هي:

$$\text{ح}(\text{س} = \text{ر}) = \text{هـ}^{-\theta}\,\frac{\theta^{\text{ر}}}{\text{ر}\,!}\ ،\ \text{ر} = ٠ ، ١ ، \ldots\ \infty \qquad (٤ - ١ - ٦)$$

حيث $\theta$ معلمة التوزيع (الوسط الحسابي)

ويمكن استنباط هذه الصيغة الإحتمالية من قانون التوزيع الإحتمالي ذي الحدين على النحو التالي:

إذا اعتبرنا دالة كثافة احتمال توزيع ذي الحدين المعطاة في المعادلة (١ - ١ - ٤)، وكانت ح صغيرة جداً، ن كبيرة جداً (ن $>$ ٥٠) بحيث أن $\lim\limits_{\text{ن}\to\infty}(\text{ن ح}) = \theta$ حيث $\theta$ مقدار ثابت (صفر $\leqslant \theta \leqslant$ ١٠)، فإن

$$\lim_{\text{ن}\to\infty} {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{ح}^{\text{ر}}\,(١ - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}} = \lim_{\text{ن}\to\infty} {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\left(\frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{\text{ر}}\left(١ - \frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \lim_{\text{ن}\to\infty} \frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\ldots(\text{ن} - \text{ر} + ١)}{\text{ر}\,!}\left(\frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{\text{ر}}\left(١ - \frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}-\text{ر}}$$

$$= \frac{\theta^{\text{ر}}}{\text{ر}\,!}\lim_{\text{ن}\to\infty}\frac{\text{ن}(\text{ن} - ١)\ldots\ldots(\text{ن} - \text{ر} + ١)}{\text{ن}^{\text{ر}}}$$

$$\lim_{\text{ن}\to\infty}\left(١ - \frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{-\text{ر}}\ \lim_{\text{ن}\to\infty}\left(١ - \frac{\theta}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$$

$$= \frac{\theta^{ر}}{ر!} \ \underset{ن \to \infty}{نهـا} \ \frac{ن}{ن} \cdot \frac{ن - ١}{ن} \cdots \frac{ن - ر + ١}{ن} \ \underset{ن \to \infty}{نهـا} \left(١ - \frac{\theta}{ن}\right)^{-ر}$$

$$\underset{ن \to \infty}{نهـا} \left(١ - \frac{\theta}{ن}\right)^{ن}$$

$$= هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!}$$

وهي نفس الصيغة المعطاة في (٦ ـ ١ ـ ٤)

**العزوم ومعاملي الإلتواء والتفرطح لتوزيع بواسون**

باستخدام المعادلات (٢ ـ ٢ ـ ٣) فإن:

$$\mu'_{١} = \sum_{ر=٠}^{\infty} ر \, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} = \theta$$

$$\mu'_{٢} = \sum_{ر=٠}^{\infty} ر^{٢} \, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} = \theta + \theta^{٢}$$

$$\mu'_{٣} = \sum_{ر=٠}^{\infty} ر^{٣} \, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} = \theta^{٣} + ٣\theta^{٢} + \theta$$

$$\mu'_{٤} = \sum_{ر=٠}^{\infty} ر^{٤} \, هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} = \theta^{٤} + ٦\theta^{٣} + ٧\theta^{٢} + \theta$$

وبالتعويض في (٧ ـ ٢ ـ ٣) ، (٨ ـ ٢ ـ ٣) ، (٩ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$\mu_{١}$ = صفر ، $\mu_{٢} = \theta$ ، $\mu_{٣} = \theta$ ، $\mu_{٤} = \theta(١ + ٣\theta)$

وإذا عوضنا عن العزوم حول الوسط الحسابي في العلاقتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣) ، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\beta_{١}^{٢} = \frac{\theta^{٢}}{\theta^{٣}} = \frac{١}{\theta}$$

$$\beta_{٢} = \frac{\theta(١ + ٣\theta)}{\theta^{٢}} = ٣ + \frac{١}{\theta}$$

يلاحظ أن $\underset{ن \to \infty}{نهـا} \frac{١}{\theta} = \underset{ن \to \infty}{نهـا} \frac{١}{ن ح}$ = صفر    أي أن $نهـا \ \beta_{١}^{٢}$ = صفر

$$\text{نهـــا}_{\text{ن}\to\infty} \left( ٣ + \frac{١}{\theta} \right) = \text{نهـــا}_{\text{ن}\to\infty} \left( ٣ + \frac{١}{\text{ن ح}} \right)$$

$$= ٣ \text{ ، أي أن } \text{نهـــا}_{\text{ن}\to\infty} \beta_{٢} = ٣$$

## توفيق توزيع بواسون Fiting a Poisson Distribution

إذا كان لدينا بيانات عن حادث نادر الوقوع فإنه يتوقع أن يكون عدد مرات وقوع هذا الحادث متغيراً له توزيع بواسون، ولتوفيق هذا التوزيع للبيانات المعطاة فإنه يلزم تحديد قيمة الثابت $\theta$ (متوسط التوزيع) وبالتالي التكرارات النسبية والمطلقة المقابلة لقيم المتغير.

**مثال**

إذا كان لدينا التوزيع التكراري التالي لحوادث العمل التي وقعت لـ ٢٠٠٠ عامل في مصنع معين خلال سنة معينة.

| عدد الحوادث | عدد العمال |
|---|---|
| ٠ | ١٢٦٠ |
| ١ | ٤٣٦ |
| ٢ | ١٤٤ |
| ٣ | ٨٨ |
| ٤ | ٥٢ |
| ٥ | ١٦ |
| ٦ | ٤ |
| | ٢٠٠٠ |

فإنه من الواضح أن حوادث العمل من الحوادث النادرة ويمكن توفيق توزيع بواسون لهذه البيانات على النحو التالي:

الوسط الحسابي $\theta$ لهذا التوزيع

$$= \frac{٠ \times ١٢٦٠ + ١ \times ٤٣٦ + ٢ \times ١٤٤ + ٣ \times ٨٨ + ٤ \times ٥٢ + ٥ \times ١٦ + ٦ \times ٤}{٢٠٠٠}$$

$$= ٠,٦٥$$

| ر | عدد العمال المشاهد | ح (س = ر) | عدد العمال المتوقع |
|---|---|---|---|
| ٠ | ١٢٦٠ | هـ^-٠,٦٦ (٠,٦٥)^٠ / ٠! = ٠,٥٢٢ | ٠,٥٢٢ × ٢٠٠٠ = ١٠٤٤ |
| ١ | ٤٣٦ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^١ / ١! = ٠,٣٣٩ | ٠,٣٣٩ × ٢٠٠٠ = ٦٧٨ |
| ٢ | ١٤٤ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^٢ / ٢! = ٠,١١٠ | ٠,١١٠ × ٢٠٠٠ = ٢٢٠ |
| ٣ | ٨٨ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^٣ / ٣! = ٠,٠٢٤ | ٠,٠٢٤ × ٢٠٠٠ = ٤٨ |
| ٤ | ٥٢ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^٤ / ٤! = ٠,٠٠٤ | ٠,٠٠٤ × ٢٠٠٠ = ٨ |
| ٥ | ١٦ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^٥ / ٥! = ٠,٠٠١ | ٠,٠٠١ × ٢٠٠٠ = ٢ |
| ٦ | ٤ | هـ^-٠,٦٥ (٠,٦٥)^٦ / ٦! = صفر | صفر × ٢٠٠٠ = صفر |
| | ٢٠٠٠ | | ٢٠٠٠ |

## جدول توزيع بواسون

جدول رقم (٢) يبين التوزيع الإحتمالي المتجمع الصاعد لتوزيع بواسون. وقد اخترنا قيم $\theta$ بين ٠,٠٥ و ٣,٠٠ بفارق ٠,٠٥ بين كل قيمة والقيمة السابقة لها فإذا كان المطلوب حسابه هو ح (س = ٢) إذا كانت $\theta$ = ١ فإن

ح (س = ٢) = ح (س ≥ ٢) − ح (س > ٢)

= ٠,٩٢٠ − ٠,٧٣٦

= ٠,١٨٤

أما ح (س ≥ ر)، إذا كانت قيمة $\theta$ معلومة، فإنه يمكن إيجاده مباشرة من الجدول المذكور.

## تمارين محلوله على توزيع بواسون

### تمرين (١)

إذا كان متوسط عدد المكالمات التي ترد على لوحة استقبال في شركة معينة خلال

الفترة من العاشرة صباحاً حتى الثانية بعد الظهر هو ٣ مكالمات في الدقيقة، أوجد:

١ ـ احتمال عدم ورود مكالمات في دقيقة واحدة خلال الفترة المذكورة.

٢ ـ احتمال ورود مكالمة واحدة على الأقل في دقيقة واحدة خلال الفترة المذكورة.

**الحل**

إذا رمزنا لعدد المكالمات التي ترد على لوحة استقبال خلال الفترة المذكورة بالرمز س فإن:

١ - ح (س = صفر) $\quad$ $هـ^{-٣} \frac{٣^{٠}}{٠!} = هـ^{-٣} = ٠,٠٥٠$

٢ - ح (س $\geqslant$ ١) $\quad$ ١ − ح (س $<$ ١)

= ١ − ح (س = صفر)

= ١ − ٠,٠٥٠ = ٠,٩٥٠

**تمرين (٢)**

إذا كان عدد الحجارة الصغيرة في السنتيمتر المربع الواحد في تركيب ١٠٠ لوح زجاجي من نوع معين يتبع توزيع بواسون بمتوسط ٠,٣، المطلوب حساب التوزيع التكراري المتوقع لعدد الحجارة الصغيرة.

**الحل**

| عدد الحجارة الصغيرة (ر) | ح (س = ر) | عدد الألواح الزجاجية المتوقع |
|---|---|---|
| ٠ | ح (س = ٠) = $\frac{هـ^{-٠,٣} (٠,٣)^{٠}}{٠!}$ = ٠,٧٤١ | ٠,٧٤١ × ١٠٠ = ٧٤,١ |
| ١ | ح (س = ١) = $\frac{هـ^{-٠,٣} (٠,٣)^{١}}{١!}$ = ٠,٢٢٢ | ٠,٢٢٢ × ١٠٠ = ٢٢,٢ |
| ٢ | ح (س = ٢) = $\frac{هـ^{-٠,٣} (٠,٣)^{٢}}{٢!}$ = ٠,٠٣٣ | ٠,٠٣٣ × ١٠٠ = ٣,٣ |
| ٣ | ح (س = ٣) = $\frac{هـ^{-٠,٣} (٠,٣)^{٣}}{٣!}$ = ٠,٠٠٤ | ٠,٠٠٤ × ١٠٠ = ٠,٤ |
| | | ١٠٠,٠ |

**تمرين (٣)**

إذا كانت نسبة الأشخاص الذين يموتون بسبب نوع معين من المرض هي

٠,٠٠١ وكان عدد الذين أمنوا على حياتهم ضد هذا النوع من المرض هو ٤٠٠، فما هو احتمال أن لا تدفع شركة التأمين لأي منهم؟ وما هو احتمال أن تدفع لشخصين على الأكثر؟

الحل

متوسط التوزيع $\theta$ = ٤٠٠ × ٠,٠٠١ = ٠,٤

$$\text{١ - ح (س = ٠)} = \text{هـ}^{-٠,٤} \frac{(٠,٤)^{٠}}{٠!} = \text{هـ}^{-٠,٤} = ٠,٦٧٠$$

$$\text{٢ - ح (س} \leqslant \text{٢)} = \text{ح (س = ٠) + ح (س = ١) + ح ( = ٢)}$$

$$= \text{هـ}^{-٠,٤} \frac{(٠,٤)^{٠}}{٠!} + \text{هـ}^{-٠,٤} \frac{(٠,٤)^{١}}{١!}$$

$$+ \text{هـ}^{-٠,٤} \frac{(٠,٤)^{٢}}{٢!}$$

= ٠,٩٩٢ وذلك من جدول توزيع بواسون رقم (٢)

### (٤ ـ ١ ـ ٤) ايجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة غير المستقلة توزيع الهايبر جيومترك

سبق وعرفنا أن توزيع ذي الحدين يستخدم في حالات المعاينة التي تكون نتيجتها أحد وجهين (مثلاً الوحدة المنتجة جيدة أو معيبة) عندما لا يتجاوز حجم العينة ٥٪ من حجم المجتمع، أما إذا تجاوز حجم العينة هذه النسبة فإننا نستخدم توزيع الهايبر جيومترك. وبشكل عام فإن هذا التوزيع يستخدم في التجارب التي تكون المعاينة فيها بدون إعادة، أي أن نتائج التجارب غير مستقلة وبالتالي فإن احتمال الحصول على صفة معينة يتغير من تجربة إلى أخرى.

فإذا كان لدينا كيس به ٦ كرات بيضاء، ٤ كرات حمراء، وسحبنا بدون إعادة ٣ كرات من هذا الكيس فإن احتمال الحصول على ٣ كرات بيضاء يمكن حسابه على النحو التالي:

احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء = $\frac{٦}{١٠}$

فإذا كانت الكرة الأولى بيضاء، وحيث أن السحب بدون إعادة، فإنه يبقى في الكيس ٩ كرات منها ٥ بيضاء

وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية بيضاء $= \frac{٥}{٩}$

احتمال أن تكون الكرة الثالثة بيضاء $= \frac{٤}{٨}$

∴ احتمال الحصول على ٣ كرات بيضاء $= \frac{٦}{١٠} \times \frac{٥}{٩} \times \frac{٤}{٨} = ٠,١٦٧$

ويمكن ايجاد الصيغة الإحتمالية لتوزيع الهايبر جيومترك على النحو التالي:

إذا كان لدينا كيس به $ن_١$ كرة من اللون الأول، $ن_٢$ كرة من اللون الثاني، ....، $ن_و$ كرة من اللون و ($ن_١ + ن_٢ + \ldots + ن_و = ن$) وسحبنا من هذا الكيس بدون إعادة ر كرة ورمزنا لعدد الكرات التي نحصل عليها من اللون الأول بالرمز $س_١$، وعدد الكرات التي نحصل عليها من اللون الثاني بالرمز $س_٢$، ....، وعدد الكرات التي نحصل عليها من اللون وبالرمز $س_و$ فإن القانون الاحتمالي العام هو:

$$ح(س_١ = ر_١ ، س_٢ = ر_٢ ، \ldots\ldots ، س_و = ر_و)$$

$$= \frac{\binom{ن_١}{ر_١}\binom{ن_٢}{ر_٢}\ldots\binom{ن_و}{ر_و}}{\binom{ن}{ر}} \qquad (٧-١-٤)$$

حيث $ر_١ + ر_٢ + \ldots + ر_و = ر$

ويمكن استنباط الصيغة الإحتمالية (٧ - ١ - ٤) من التطبيق المباشر لقانون الإحتمال الرياضي (١ - ١ - ٢)، حيث يمثل البسط عدد الحالات المواتية للحصول على $ر_١$ كرة من اللون الأول، $ر_٢$ كرة من اللون الثاني، ....، $ر_و$ كرة من اللون وبينما يمثل المقام عدد الحالات التي يمكن بها الحصول على ر كرة (بصرف النظر عن اللون) من جميع الكرات الموجودة في الكيس.

وإذا كان المطلوب هو إيجاد احتمال أن يكون عـدد الكرات من اللون الأول هـو $ر_1$ بصرف النظر عن الألوان الأخرى فإنه يمكن كتابة هذا الاحتمال كما يلي:

$$ح\,(س_1 = ر_1) = \frac{\binom{ن_1}{ر_1}\binom{ن - ن_1}{ر - ر_1}}{\binom{ن}{ر}} \qquad (٨ - ١١ - ٤)$$

وتحقق الدالة (٨ ـ ١ ـ ٤) شرطي دالة كثافة الاحتمال، حيث أن:

$$ح\,(س_1 = ر_1) \geqslant \text{صفر}$$

$$\sum_{ر_1=0} ح\,(س_1 = ر_1) = \sum_{ر_1=0} \frac{\binom{ن_1}{ر_1}\binom{ن - ن_1}{ر - ر_1}}{\binom{ن}{ر}} = ١$$

**القيمة المتوقعة والتباين:**

$$ت\,(س_1) \qquad \sum_{ر_1=0} ر_1 \frac{\binom{ن_1}{ر_1}\binom{ن - ن_1}{ر - ر_1}}{\binom{ن}{ر}}$$

$$= ر \frac{ن_1}{ن} \qquad (٩ - ١ - ٤)$$

$$تبا\,(س_1) \quad = ر \frac{ن_1}{ن}\left(١ - \frac{ن_1}{ن}\right)\frac{ن - ر}{ن - ١}$$

ويسمى الكسر $\frac{ن - ر}{ن - ١}$ معامـل التصحيـح Correction Factor للمجتمعـات المحـدودة إذا كانت المعـاينة بـدون إعادة، أمـا إذا كان المجتمـع غير محـدود أو كـانت المعاينة مع الإعادة فإن قيمة معامل التصحيح تساوي واحد صحيح، وفي هذه الحالـة فإن توزيع الهيبرجيومترك في حالة المتغير ذو الوجهين يؤول إلى توزيع ذي الحدين.

**مثال:**

إذا تقدم ٦ من طلبة قسم الإقتصاد والإحصاء و ٤ من طلبة قسم المحاسبة و ٨ من طلبـة قسم إدارة الأعـمال لمـلء ٤ وظـائف شـاغـرة تمّ الإعـلان عنهـا في إحــدى

الشركات، وإذا قررت الشركة أن خريجي الأقسام الثلاثة متكافئون من حيث القدرة على أداء العمل في الوظائف الشاغرة وقررت أن تختار بصورة عشوائية ٤ من المتقدمين لملء هذه الوظائف، أوجد:

١ ـ احتمال أن يتم اختيار ٢ من قسم الإقتصاد والإحصاء و ١ من قسم المحاسبة و ١ من قسم إدارة الأعمال.

٢ ـ احتمال أن يتم اختيار ٣ من قسم الاقتصاد والإحصاء

٣ ـ القيمة المتوقعة لعدد الطلبة المختارين من قسم الإقتصاد والإحصاء

٤ ـ تباين عدد الطلبة المختارين من قسم الإقتصاد والإحصاء.

الحل

$$١ - ح (س_١ = ٢ ، س_٢ = ١ ، س_٣ = ١) = \frac{\binom{٦}{٢}\binom{٤}{١}\binom{٨}{١}}{\binom{١٨}{٤}}$$

$$= \frac{٤٨٠}{٣٠٦٠}$$

$$٢ - ح (س_١ = ٣) = \frac{\binom{٦}{٣}\binom{١٢}{١}}{\binom{١٨}{٤}}$$

$$= \frac{٢٤٠}{٣٠٦٠}$$

٣ ـ بالتعويض في (٩ ـ ١ ـ ٤) فإن

$$ت (س_١) = ٤ \times \frac{٦}{١٨} = \frac{٢٤}{١٨} = \frac{٤}{٣} = ١,٣٣$$

٤ ـ بالتعويض في (١٠ ـ ١ ـ ٤) فإن

$$تبا (س_١) = ٤ \times \frac{١٨}{١٦} \times \left(١ - \frac{٦}{١٨}\right) \times \frac{١٨ - ٤}{١٨ - ١}$$

$$= ٤ \times \frac{٦}{١٨} \times \frac{١٢}{١٨} \times \frac{١٤}{١٧}$$

$$= \frac{١١٢}{١٥٣}$$

# الفصل الثاني

## التوزيعات المتصلة Continuous Distributions

لقد تعرضنا في الفصل السابق بالشرح لبعض التوزيعات المتقطعة الهامة وسنقوم في هذا الفصل بدراسة التوزيعات المتصلة التالية:

١ ـ التوزيع المنتظم (أو المستطيل)

٢ ـ توزيع جاما

٣ ـ توزيع بيتا

٤ ـ التوزيع الأسي

### (١ ـ ٢ ـ ٤) التوزيع المنتظم (أو المستطيل)

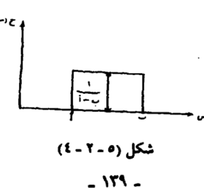
### Uniform or Rectangular Distribution

إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة إحتمال

ح (س؛ أ، ب) = $\frac{١}{ب - أ}$ أ ≼ س ≼ ب

= صفر فيما عدا ذلك (١٠ ـ ٢ ـ ٤)

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع منتظم (أنظر شكل (٥ ـ ٢ ـ ٤)) ويتم الحصول على مثل هذا التوزيع عندما تكون جميع القيم بين أ، ب متساوية الاحتمال.



شكل (٥ ـ ٢ ـ ٤)

ودالة الاحتمال التجميعي لهذا التوزيع هي

$$ع (س) = \int_{أ}^{س} \frac{١}{ب - أ} د س = \frac{س - أ}{ب - أ} \qquad (١١ - ٢ - ٤)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة كما في الشكل (٦ - ٢ - ٤)
وبشكل عام فإن دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم تأخذ الصورة

$$ح (س) = ك \qquad \text{في فترة محددة} \qquad (١٢ - ٢ - ٤)$$

حيث ك مقدار ثابت يمكن حساب قيمته بما يحقق الشرطين الأساسيين لدالة كثافة الاحتمال

$$ح (س) \geqslant صفر$$

$$\int_{-x}^{x} ح (س) د س = ١$$

فإذا كانت دالة كثافة الاحتمال على النحو التالي

$$ح (س) = ك \qquad صفر \leqslant س \leqslant ٤$$

فإنه يمكن حساب قيمة ك التي تجعل من الدالة ح (س) دالة كثافة إحتمال كما يلي:



شكل (٦ - ٢ - ٤)

$$\int_{.}^{٤} ك د س = ك س ]_{.}^{٤} = ١$$

$$ك (٤ - صفر) = ١$$

$$\therefore ك = \frac{١}{٤}$$

**عزوم التوزيع المنتظم:**

باستخدام المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٣) فإن العزم الواوي حول الصفر هو

$$\mu'_و = \frac{١}{ب - أ} \cdot \frac{ب^{و+١} - أ^{و+١}}{و + ١} \qquad (١٣ - ٢ - ٤)$$

ومنها نجد أن

$$ت(س) = \mu'_١ = \frac{١}{ب - أ} \cdot \frac{ب^٢ - أ^٢}{٢} = \frac{ب + أ}{٢}$$

$$ت(س^٢) = \mu'_٢ = \frac{١}{ب - أ} \cdot \frac{ب^٣ - أ^٣}{٣} = \frac{ب^٢ + أب + أ^٢}{٣}$$

وباستخدام المعادلة (٧ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\sigma^٢ = \mu_٢ = \frac{ب^٢ + أب + أ^٢}{٣} - \left(\frac{ب + أ}{٢}\right)^٢ = \frac{(ب - أ)^٢}{١٢}$$

مثال ١:

إذا فرضنا أن أ = − أ، ب = أ أي أن − أ $\leqslant$ س $\leqslant$ أ

فإنه باستخدام (١٣ ـ ٢ ـ ٤)

$$\mu'_و = \frac{١}{٢ أ} \cdot \frac{أ^{و+١} - (-أ)^{و+١}}{و + ١}$$

فإذا كانت و فردية (و = ٢ م + ١) فإن

$$\mu'_{٢م+١} = صفر$$

أي أن

$$\mu'_١ = ت(س) = صفر$$

$$\mu'_٣ = ت(س^٣) = صفر$$ .... وهكذا

أي أن العزوم الفردية حول نقطة الأصل = صفر

أما إذا كانت و زوجية (و = ٢ م) فإن

$$\mu'_{٢م} = \frac{أ^{٢م}}{٢ م + ١}$$

أي أن

$$\mu'_2 = \frac{أ^2}{3}$$

$$\mu'_4 = \frac{أ^4}{5} \quad ....\ وهكذا$$

وعليه فإن تباين س ($\sigma^2$) باستخدام المعادلة (٧ ـ ٢ ـ ٣) هو:

$$\sigma^2 = \frac{أ^2}{3} - (صفر)^2 = \frac{أ^2}{3}$$

وباستخدام المعادلتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣)، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\beta_1 = صفر$$

$$\beta_2 = \frac{9}{5}$$

**مثال ٢ :**

إذا كانت ح (س) = ¼     صفر ≥ س ≥ ٤

فإن القيمة المتوقعة والتباين والتفرطح هي:

من المعادلة (١٣ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$ت(س) = \mu'_1 = \frac{1}{4 - صفر} \times \frac{4^2 - صفر^2}{2} = 2$$

$$ت(س^2) = \mu'_2 = \frac{1}{4 - صفر} \times \frac{4^3 - صفر^3}{3} = \frac{16}{3}$$

$$ت(س^3) = \mu'_3 = \frac{1}{4 - صفر} \times \frac{4^4 - صفر^4}{4} = 16$$

$$ت(س^3) = \mu'_4 = \frac{1}{4 - صفر} \times \frac{4^5 - صفر^5}{5} = \frac{256}{5}$$

وبالتعويض في المعادلات (٧ ـ ٢ ـ ٣)، (٨ ـ ٢ ـ ٣)، (٩ ـ ٢ ـ ٣) نجد أن

$$\sigma^2 = \mu_2 = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}$$

$$\mu_3 = 16 - 3 \times \frac{16}{3} \times 2 + 2 \times 2^3 = 32$$

$$\mu_4 = \frac{٢٥٦}{٥} - ٤ \times \frac{١٦}{٣} \times ٢ + ٦ \times \frac{١٦}{٣} \times ٢^٢ - ٢^٤ = \frac{١٦}{٥}$$

وبالتعويض في المعادلتين (١٠ ـ ٢ ـ ٣)، (١١ ـ ٢ ـ ٣) فإن

$$\beta_1 = \frac{٣٢}{\sqrt{\left(\frac{٤}{٣}\right)^٣}}$$

$$\beta_2 = \frac{١٦}{٥} \div \left(\frac{٤}{٣}\right)^٢ = \frac{٩}{٥}$$

## (٢ ـ ٢ ـ ٤) دالة جاما وتوزيع جاما

## Gamma Function and Gamma Distribution

تعتبر دالة جاما واحدة من الدوال الرياضية الهامة والشائعة الاستخدام في نظرية الاحصاء وسنتطرق هنا إلى هذه الدالة والتوزيع الاحصائي المبني عليها والمسمى باسمها.

**أولاً: دالة جاما**

تعرف الدالة الرياضية

$$\Gamma(ن) = \int_{٠}^{\infty} هـ^{-س} س^{ن-١} د س \qquad (١٤ ـ ٢ ـ ٤)$$

على أنها دالة جاما.

وهذا التكامل تقاربي عندما تكون ن موجبة، ويمكن أن يكتب على الصورة:

$$\Gamma(ن) = \int_{٠}^{\infty} س^{ن-١} د(- هـ^{-س}) \qquad (١٥ ـ ٢ ـ ٤)$$

وإذا استبدلنا س بـ $س^٢$ في المعادلة (١٤ ـ ٢ ـ ٤) فإنه يمكن كتابة دالة جاما على الصورة:

$$\Gamma(ن) = \int_{٠}^{\infty} س^{٢ن-١} هـ^{-س^٢} د س \qquad (١٦ ـ ٢ ـ ٤)$$

والذي يهمنا من دالة جاما في هذا السياق هو بعض خصائصها الهامة والتي سنقوم باستخدامها والإشارة اليها في أكثر من موضع في هذا الكتاب

من المعادلة (١٦ ـ ٢ ـ ٤) نجد أن

$$\Gamma(ن) = \int_{.}^{\infty} س^{ن-١} د(- هـ^{-س})$$

$$= \left[ - س^{ن-١} هـ^{-س} \right]_{.}^{\infty} + \int_{.}^{\infty} (ن - ١) س^{ن-٢} هـ^{-س} د س$$

$$= (ن - ١) \, \Gamma(ن - ١) \qquad (١٧ - ٢ - ٤)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\Gamma(ن - ١) = (ن - ٢) \, \Gamma(ن - ٢) \; \ldots\ldots \; وهكذا$$

وإذا كانت ن عددا صحيحا موجبا فإنه يمكن إثبات أن

$$\Gamma(ن) = (ن - ١)(ن - ٢) \ldots\ldots \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$= (ن - ١)! \qquad (١٨ - ٢ - ٤)$$

وإذا وضعنا ن = ١ فإن

$$\Gamma(١) = \int_{.}^{\infty} هـ^{-س} د س = ١$$

ومن الخصائص الهامة الأخرى التي يجب الإشارة اليها هي أن:

$$\Gamma\left(\frac{١}{٢}\right) = \sqrt{\pi} \qquad (١٩ - ٢ - ٤)$$

**ثانياً: توزيع جاما**

إذ كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة إحتمال

$$ح(س، ن) = \frac{هـ^{-س} س^{ن-١}}{\Gamma(ن)} \qquad س > صفر$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك \qquad (٢٠ - ٢ - ٤)$$

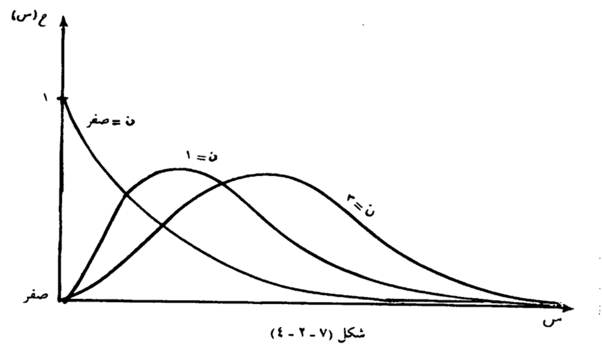
فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع جاما ذي المعلمة ن.

ومن الواضح أن هذه الدالة تحقق شرطي دالة كثافة الاحتمال، حيث:

$$ح(س) \geqslant صفر$$

$$\int_{.}^{\infty} ح(س) د س = ١$$

ويبينَ الشكل (٧ ـ ٢ ـ ٤) دالـة كثافـة الاحتمال لتـوزيع جـامـا لعـدد من قيم معلمته ن




شكل (٧ ـ ٢ ـ ٤)

ولحساب العزوم لتوزيع جـاما فـإننا نستـطيع استخـدام الدالـة المولـدة للعزوم والمعرّفة بالمعادلة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالي:

$$\mu\,(\text{ت}) = \text{ت}\,(\text{هـ}^{\text{س ت}})$$

$$= \frac{١}{\Gamma\,(\text{ن})} \int_{.}^{\infty} \text{هـ}^{\text{س ت}}\ \text{س}^{\text{ن}-١}\ \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{د س}$$

$$= \frac{١}{\Gamma\,(\text{ن})} \int_{.}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}(١-\text{ت})}\ \text{س}^{\text{ن}-١}\ \text{د س}$$

وبوضع ص = س (١ − ت) حيث $\quad$ ص > صفر

فإن $\quad \text{س} = \dfrac{\text{ص}}{١ - \text{ت}}$

$$\text{د س} = \frac{\text{د ص}}{١ - \text{ت}}$$

وبالتالي فإن

$$\mu\,(\text{ت}) = \frac{(١ - \text{ت})^{-\text{ن}}}{\Gamma\,(\text{ن})} \int_{.}^{\infty} \text{ص}^{\text{ن}-١}\ \text{هـ}^{-\text{ص}}\ \text{د ص}$$

$$= (١ - \text{ت})^{-\text{ن}} \qquad (٢١ _ ٢ _ ٤)$$

وبأخذ مفكوك الطرف الأيسر للمعادلة (٢١ ـ ٢ ـ ٤) نجد أن:

$$\mu\,(ت) = ١ + ن\,ت + \frac{ن\,(ن+١)\,ت^{٢}}{٢\,!} + \frac{ن\,(ن+١)\,(ن+٢)\,ت^{٣}}{٣\,!} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{ن\,(ن+١)\,(ن+٢)\,\ldots\,(ن+و-١)\,ت^{و}}{و\,!} + \ldots \qquad (٢٢ - ٢ - ٤)$$

وباستخدام (٣٠ ـ ٤ ـ ٣)، (٢٢ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\mu_{و} = ن\,(ن+١)\;(ن+٢)\;\ldots\;(ن+و-١) \qquad (٢٣ - ٢ - ٤)$$

أي أن

$$\mu'_{١} = ت\,(س) = ن$$

$$\mu'_{٢} = ت\,(س^{٢}) = ن\,(ن+١)$$

تباين س $(\sigma^{٢}) = \mu_{٢} = \mu'_{٢} - \mu'^{٢}_{١}$

$$= ن\,(ن+١) - ن^{٢} = ن$$

**نظرية**

إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين مستقلين $س_{١}$ له توزيع جاما بمعلمة $ن_{١}$، $س_{٢}$ له توزيع جاما بمعلمه $ن_{٢}$ فإن المتغير العشوائي

$$س = س_{١} + س_{٢}$$

هو الآخر له توزيع جاما بمعلمه $ن = ن_{١} + ن_{٢}$

**البرهـــان:**

من المعادلة (٢ - ٢ - ٤) نجد أن

$$\mu_{س_{١}}(ت) = (١ - ت)^{-ن_{١}}$$

$$\mu_{س_{٢}}(ت) = (١ - ت)^{-ن_{٢}}$$

وحيث أن المتغيرين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ مستقلان فإن:

$$\mu_{س}\,(ت) = \mu_{س_{١}+س_{٢}}\,(ت)$$

$$= \mu_{س_{١}}\,(ت)\cdot\mu_{س_{٢}}(ت)$$

$$= (١ - ت)^{-(ن_{١}+ن_{٢})} \qquad (٢٤ - ٢ - ٤)$$

أي أن $س = س_{١} + س_{٢}$ له توزيع جاما بمعلمه $ن = ن_{١} + ن_{٢}$

### (٣ - ٢ - ٤) دالة بيتا وتوزيع بيتا Beta Function and Beta Distribution

دالة بيتا دالة رياضية هامة وذات استخدامات واسعة في نظرية الإحصاء لا بد من الإشارة اليها وإلى التوزيع الإحصائي المتصل بها بما يتناسب مع احتياجاتنا في هذا الكتاب.

**أولاً: دالة بيتا**

تعرف الدالة الرياضية

$$\beta\,(م،ن) = \int_{.}^{١} س^{م-١}\,(١ - س)^{ن-١}\,دس \qquad (٢٥ - ٢ - ٤)$$

على أنها دالة بيتا ذات المعلمتين م،ن

ويعتبر هذا التكامل تقاربياً إذا كانت قيمة كل من معلمتي الدالة م،ن موجبة.

وإذا وضعنا س = جا$^{٢}\theta$ في المعادلة (٢٥ - ٢ - ٤) نحصل على الصورة التالية لدالة بيتا:

$$\beta\,(م،ن) = ٢\int_{.}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{٢م-١}\,\theta\,.جتا^{٢ن-١}\,\theta\,د\theta \qquad (٢٦ - ٢ - ٤)$$

ومن خصائص دالة بيتا الهامة أن

$$\beta\,(م،ن) = \frac{\Gamma(م)\,\Gamma(ن)}{\Gamma(م+ن)} \qquad (٢٧ - ٢ - ٤)$$

فإذا كانت م = ن = ١ فان

$$\beta\,(١،١) = \int_{.}^{١} س^{١-١}\,(١-س)^{١-١}\,دس = \frac{\Gamma(١)\,\Gamma(١)}{\Gamma(١+١)} = ١$$

وإذا كانت م = ن = ½ فإن

$$\beta\,(½،½) = \int_{.}^{١} س^{١/٢-١}\,(١ - س)^{١/٢-١}\,د س = \frac{\Gamma(½)\,\Gamma(½)}{\Gamma\,(١)}$$

$$= \{\Gamma\,(½)\}^{٢}$$

وبالتعويض في المعادلة (٢٦ - ٢ - ٤) فإن

$$\{\Gamma(\frac{١}{٢})\}^{٢} = ٢\int_{.}^{\frac{\pi}{٢}} جا^{\frac{٢}{٢}-١}\,\theta\,جتا^{\frac{٢}{٢}-١}\,د\theta$$

$$\therefore\ \Gamma\,(½) = \sqrt{\pi}$$

ومن خصائص دالة بيتا الهامة الأخرى أنها متماثلة في معلمتيها، فإذا وضعنا ص = ١ - س في المعادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٤) نجد أن

$$\beta\,(م\,،\,ن) = \int_{0}^{1} س^{م-1}\,(1 - س)^{ن-1}\,دس$$

$$= \int_{0}^{1} ص^{ن-1}\,(1 - ص)^{م-1}\,دص$$

**ثانياً: توزيع بيتا**

الصورة الأولى: إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

$$ح\,(س،م،ن) = \frac{س^{م-1}\,(1-س)^{ن-1}}{\beta(م،ن)} \qquad 0 \leqslant س \leqslant 1$$

$$= صفر \qquad فيما\ عدا\ ذلك \qquad (28-2-4)$$

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له دالة توزيع بيتا من النوع الأول ذي المعلمتين م،ن

وتحقق هذه الدالة شرطي دالة كثافة الإحتمال حيث أن

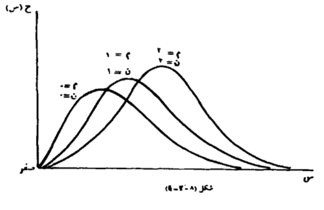
$ح\,(س) \geqslant صفر$

$$\int_{0}^{1} ح\,(س)\,د\,س = \frac{1}{\beta\,(م،ن)} \int_{0}^{1} س^{م-1}\,(1 - س)^{ن-1}\,دس$$

$$= \frac{\beta(م،ن)}{\beta(م،ن)} = 1$$

وذلك باستخدام المعادلة (٢٤ ـ ٢ ـ ٤)

ويبيّن الشكل (٨ ـ ٢ ـ ٤) دالة كثافة الإحتمال لتوزيع بيتا لعدد من قيم معلمتيه م،ن




شكل (٨ ـ ٢ ـ ٤)

ولحساب العزوم لتوزيع بيتا من النوع الأول نستخدم الدالة المولدة للعزوم والمعرّفة بالمعادلة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالي:

$$\mu\,(ت) = \frac{١}{\beta(م،ن)} \int_{.}^{١} هـ^{ت س}\, س^{م\ ١}\ (١ - س)^{ن-١}\ دس \qquad (٢٩ ـ ٢ ـ ٤)$$

$$لكن\ هـ^{ت س} = ١ + \frac{ت\ س}{١\,!} + \frac{(ت\ س)^{٢}}{٢!} + \frac{(ت\ س)^{٣}}{٣!} + \ldots\ldots \qquad (٣٠ ـ ٢ ـ ٤)$$

وباستخدام المفكوك (٣٠ ـ ٢ ـ ٤) في المعادلة (٢٩ ـ ٢ ـ ٤) نجد أن

$$\mu\,(ت) = \frac{١}{\beta(م،ن)} \left[\beta(م،ن) + \beta\,(م + ١،ن)\,\frac{ت}{١!} + \beta\,(م\ +\ ٢،ن) \frac{ت^{٢}}{٢!} + \ldots\ldots\right] \qquad (٣١ ـ ٢ ـ ٤)$$

وباستخدام (٣٠ ـ ٤ـ٣) ، (٣١ ـ ٢ ـ ٤) فإن العزم الواوي حول الصفر هو:

$$\mu'_{و} = \frac{\beta(م+و،ن)}{\beta(م،ن)} \qquad (٣٢ ـ ٢ ـ ٤)$$

وباستخدام المعادلة (٣٢ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\mu'_{١} = ت\,(س) = \frac{\beta\,(م + ١ ، ن)}{\beta\,(م،ن)} = \frac{م}{م + ن}$$

$$\mu'_{٢} = ت\,(س^{٢}) = \frac{\beta(م + ٢،ن)}{\beta\,(م،ن)} = \frac{م\,(م+١)}{(م+ن)\,(م+ن+١)}$$

$$تباين\ س\ (\sigma^{٢}) \ = \mu_{٢} = \mu'_{٢} - \mu'_{١}$$

$$= \frac{م\,(م+١)}{(م+ن)\,(م+ن+١)} - \left(\frac{م}{م+ن}\right)^{٢} = \frac{م\ ن}{(م + ن)^{٢}\,(م + ن + ١)}$$

الصورة الثانية: إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

$$ح(س؛م،ن) = \frac{1}{\beta(م،ن)} \cdot \frac{س^{م-1}}{(1+س)^{م+ن}} \qquad ٠ \leqslant س \leqslant \infty$$

$$= صفر \qquad \text{فيما عدا ذلك} \qquad (٤ - ٢ - ٣٣)$$

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع بيتا من النوع الثاني ذي المعلمتين م،ن.

ومن الواضح أن هذه الدالة هي الأخرى تحقق شرطي دالة كثافة الإحتمال، حيث أن

ح (س) ≤ صفر

كما أنه يمكن إثبات أن $\int_{٠}^{\infty}$ ح (س؛م،ن) د س = ١ على النحو التالي

$$\int_{٠}^{\infty} ح(س؛م،ن)\, د س = \frac{1}{\beta(م،ن)} \int_{٠}^{\infty} \frac{س^{م-1}}{(1+س)^{م+ن}}\, د س \qquad (٤ - ٢ - ٣٤)$$

فإذا وضعنا ص = $\frac{س}{١ + س}$ ٠ ≤ ص ≤ ١ في المعادلة (٤ - ٢ - ٣٤)

فإن

$$\int_{٠}^{\infty} ح(س؛م،ن)\, دس = \frac{1}{\beta(م،ن)} \int_{٠}^{١} \left(\frac{ص}{1 - ص}\right)^{م-1}$$

$$(1 - ص)^{م+ن} \frac{1}{(1 - ص)^{2}}\, د ص$$

$$= \frac{1}{\beta(م،ن)} \int_{٠}^{١} ص^{م-1} (1 - ص)^{ن-1}\, دص = 1$$

وذلك باستخدام المعادلة (٤ - ٢ - ٢٥).

## (٤ - ٢ - ٤) التوزيع الأسي

## Exponential Distribution or Laplace Distribution

إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

$$ح(س) = ك هـ^{-كس} \qquad ٠ \leqslant س \leqslant \infty$$

$$= صفر \qquad \text{فيما عدا ذلك} \qquad (٤ - ٢ - ٣٥)$$

. فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع أسي.

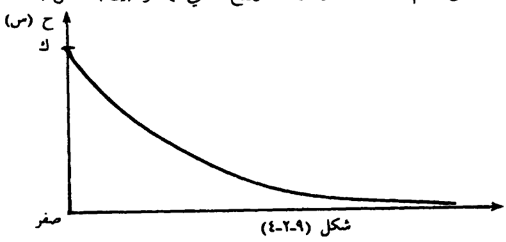
وتحقق هذه الدالة شرطي دالة كثافة الإحتمال، حيث أن:

ح (س) $\geqslant$ صفر

$$\int_{.}^{\infty} ح(س)\, د س = \int_{.}^{\infty} ك\, هـ^{-ك س}\, د س$$

$$= ك \int_{.}^{\infty} هـ^{-ك س}\, دس = ١ \qquad (٣٦ - ٢ - ٤)$$

ويمكن رسم دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الأسي كما هو مبين بالشكل (٩ - ٢ - ٤)




شكل (٩-٢-٤)

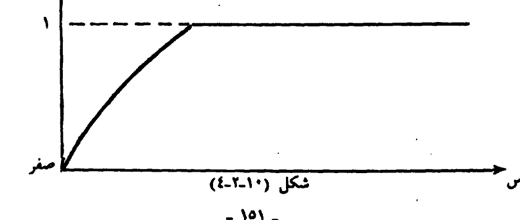
ودالة الاحتمال التجميعي لهذا التوزيع ج (س) هي

ج (س) = ح (س $\geqslant$ س)

$$= ك \int_{.}^{س} هـ^{-ك ع}\, د ع$$

$$هـ^{-ك ع} \Big]_{.}^{س} = ١ - هـ^{-ك س} \qquad (٣٧ - ٢ - ٤)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة كما في الشكل (١٠ - ٢ - ٤)




شكل (١٠-٢-٤)

واذا كانت ك = ١ فإن ح (س) = هـ $^{-س}$

وتاخذ الدالة في هذه الحالة الشكل (١١ ـ ٢ ـ ٤)




شكل (١١-٢-٤)

وتكون دالة الإحتمال التجميعي ع (س) = ١ − هـ $^{-س}$

ولحساب العزوم للتوزيع الأسي نستخدم الدالة المولدة للعزوم المعرفة بـالمعادلـة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) على النحو التالي:

$$\mu(ت) = \int_{.}^{\infty} هـ^{ت س} ك هـ^{-ك س} دس$$

$$= ك \int_{.}^{\infty} هـ^{-(ك-ت)س} دس$$

$$= ك \left[\frac{هـ^{-(ك-ت)س}}{ك - ت}\right]_{.}^{\infty} = \frac{ك}{ك - ت}$$

$$= \left(١ - \frac{ت}{ك}\right)^{-١} \qquad (٣٨ - ٢ - ٤)$$

وبإيجاد المفكوك للطرف الأيسر للمعادلة (٣٨ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\mu(ت) = ١ + \frac{ت}{ك} + \frac{ت^{٢}}{ك^{٢}} + \ldots\ldots + \frac{ت^{و}}{ك^{و}} + \ldots\ldots \qquad (٣٩ - ٢ - ٤)$$

وباستخدام (٣٠ ـ ٤ ـ ٣)، (٣٩ ـ ٢ ـ ٤) فإن العزم الواوي حول الصفر هو:

$$\mu'_{و} = \frac{و!}{ك^{و}} \qquad (٤٠ - ٢ - ٤)$$

وباستخدام (٤٠ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$\mu'_{١} = ت(س) = \frac{١}{ك}$$

$$\mu'_2 = ت\,(س^2) = \frac{2}{ك^2}$$

$$تباين\,(س) = \mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$= \frac{2}{ك^2} - \left(\frac{1}{ك}\right)^2 = \frac{1}{ك^2}$$

ولهذا التوزيع تطبقات واسعة في عدد من الظواهر التي تتبع هذا التوزيع مثل أعمار أنواع معينة من قطع الغيار، الفترة الزمنية بين المكالمات الهاتفية الواردة إلى أحد المقاسم اليدوية أو الآلية ومدة انتظار (أو خدمة) الزبائن في إحدى العيادات أو أماكن الخدمة مثل الكراجات وغيرها.

**مثـــال:**

إذا كانت مدة خدمة إحدى قطع الغيار في آلة معينة تتبع التوزيع الأسي بمتوسط قدره ثلاث سنوات وأردنا إيجاد:

١ ـ احتمال أن تخدم هذه القطعة مدة سنتين على الأقل.

٢ ـ احتمال أن تخدم هذه القطعة لمدة خمس سنوات على الأقل إذا علم بأنها قد خدمت مدة ثلاث سنوات على الأقل.

يمكن حل مثل هذا النوع من الأمثلة على النحو التالي:

بما أن متوسط التوزيع = ٣ فإن قيمة الثابت ك = $\frac{1}{3}$

حيث أن ت(س) = $\frac{1}{ك}$ في التوزيع الأسي

$$\therefore\ ح\,(س) = \tfrac{1}{3}\,هـ^{-\frac{س}{3}}$$

١ ـ احتمال أن تخدم قطعة الغيار سنتين على الأقل هو

$$ح\,(س \geqslant 2) = 1 - ع\,(2)$$

ومن المعادلة (٢٧ ـ ٢ ـ ٤) فإن

$$ح\,(س \geqslant 2) \quad = 1 - (1 - هـ^{-\frac{2}{3}})$$

$$= هـ^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 0.5134$$

٢ ـ احتمال أن تخدم قطعة الغيار خمس سنوات على الأقل إذا علم بأنها خدمت ثلاث سنوات يمكن حسابه باستخدام (١٣ ـ ١ ـ ٢) كما يلي:

$$\text{ح}\,(\text{س} \geqslant ٥ / \text{س} \geqslant ٣) = \frac{\text{ح}\,(\text{س} \geqslant ٥)}{\text{ح}\,(\text{س} \geqslant ٣)}$$

$$= \frac{١ - (١ - \text{هـ}^{-\frac{٥}{٣}})}{١ - (١ - \text{هـ}^{-\frac{٣}{٣}})}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{-\frac{٥}{٣}}}{\text{هـ}^{-\frac{٣}{٣}}} = \text{هـ}^{-\frac{٢}{٣}}$$

$$= ٠,٥١٣٤ \text{ مرة أخرى}$$

وهذه خاصية من خصائص التوزيع الأسي وهي ما يسمى بخاصية الإفتقار إلى الذاكرة Lack of memory في هذا التوزيع، حيث أن العمر المستقبلي لقطعة الغيار (مثلاً) مستقل عن عمرها الحالي.

## اسئلة وتمارين (٤)

(٤ - ١) إذا كان ٤٠٪ من المستخدمين في شركة ما يوافقون على نظام جديد للحوافز، واخترنا عشوائياً خمسة مستخدمين، أوجد:

١ - احتمال أن نجد من بينهم شخصين فقط يوافقون على النظام الجديد

٢ - احتمال أن نجد من بينهم شخصاً واحداً على الأقل يوافق على النظام الجديد.

٣ - القيمة المتوقعة لعدد الذين يوافقون على النظام الجديد في عينة مكونة من ١٠٠ شخص.

٤ - الانحراف المعياري لعدد الذين يوافقون على النظام الجديد في عينة مكونة من ٥٤ شخص.

(٤ - ٢) إذا كان احتمال أن الوحدة تالفة من إنتاج آلة معينة هو ٠,٠١، وأخذنا عينة مكونة من ٤ وحدات من إنتاج هذه الآلة، احسب

١ - احتمال أن لا تحتوي هذه العينة على وحدة تالفة

٢ - احتمال أن تحتوي على وحدة تالفة واحدة على الأقل

٣ - احتمال أن تكون الوحدة الثانية تالفة.

(٤ - ٣) بالإشارة إلى تمرين (٤ - ٢)، إذا اخترنا عينة عشوائية مكونة من خمس أسر من مجتمع هذه الدراسة، أوجد

١ - احتمال أن يكون من بينها ثلاث أسر فقط تملك ثلاجة أقل من ٩ قدم.

٢ - احتمال أن يكون من بينها أسرة واحدة على الأقل من مالكي الثلاجة ١١ قدم فأكثر.

وإذا اخترنا عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ اسرة من مجتمع هذه

الدراسة، أوجد القيمة المتوقعة والتباين لعدد الأسر التي تملك ثلاجة ٩ ـ ١١ قدم.

(٤ ـ ٤) إذا كان احتمال وقوع حادث معيّن هو $\frac{١}{٣}$، أوجد

١ - إحتمال وقوع الحادث مرة واحدة في أربع محاولات مستقلة
٢ - إحتمال وقوع الحادث مرة واحدة على الأكثر في خمس محاولات مستقلة
٣ - القيمة المتوقعة لعدد مرات وقوع الحادث في ٦٠ محاولة مستقلة.
٤ - الانحراف المعياري لعدد مرات وقوع الحادث في ٧٢ محاولة مستقلة.

(٤ ـ ٥) إذا كانت دالة المنفعة هي ع = ٣ س - ٠,٠١ $س^٢$
حيث س متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين، وفرضنا أن عدد مرات إجراء التجربة ن = ٦ واحتمال أن يحمل المتغير صفة معينة ح = $\frac{١}{٦}$، أوجد القيمة المتوقعة للمنفعة.

(٤ ـ ٦) إذا كانت مراقبة جودة الإنتاج في مصنع معيّن تتم بفحص عينات عشوائية حجم كل منها خمس مفردات، وإذا كان احتمال أن تكون الوحدة معيبة يساوي ٠,٠٢، أوجد التوزيع التكراري المتوقع لعدد الوحدات المعيبة في ١٠٠ عينة عشوائية.

(٤ ـ ٧) إذا كان متوسط عدد المكالمات التلفونية التي ترد على لوحة تلفونات في مؤسسة معينة خلال يوم عمل طوله ثمان ساعات هو ٢٤ مكالمة، فما هو احتمال ورود ٤ مكالمات خلال ساعة واحدة؟ وما هو احتمال ورود مكالمة واحدة على الأقل خلال ساعة واحدة؟

(٤ ـ ٨) إذا كان متوسط عدد المكالمات التي ترد على لوحة تلفونات في شركة معينة، خلال الفترة ٢ ـ ٤ بعد الظهر هو ٢.٥ مكالمة في الدقيقة.

أوجد:

١ ـ احتمال عدم ورود أية مكالمة خلال دقيقة معينة.
٢ ـ احتمال ورود مكالمة واحدة على الأقل في الدقيقة الواحدة.

(٤ ـ ٩) قام مدير التخطيط في أحد المصانع بدراسة ظاهرة توقف الالات

اليـومي في المصنع بسبب الأعـطال، وقـد جمـع البيـانـات التـاليـة عن الآلات التي توقفت خلال ٢٠٠ يوماً:

| عدد الآلات التي توقفت في اليوم | عدد الأيام |
|---|---|
| صفر | ٩٩ |
| ١ | ٧٠ |
| ٢ | ٢٤ |
| ٣ | ٦ |
| ٤ | ١ |
| ٥ | صفر |
| المجموع | ٢٠٠ |

فما هو احتمال أن تتوقف ثلاث آلات عن العمل في اليـوم الواحـد؟ ما هو احتمال أن تتوقف آلتان على الأكثر عن العمل في اليوم الواحد؟

(١٠ ـ ٤) إذا كان متوسط عدد إصابات العمل في مصنع معين هـو ٠.٤ إصابـة في اليوم الواحد، فما هو احتمال حدوث إصابتين في اليوم الواحد؟ ومـا هو احتمال حدوث إصابة واحدة على الأقل في اليوم الواحد؟

(١١ ـ ٤) أولاً: إذا كان المتغير س يتبع توزيـع بواسـون بدالـة احتمال

$$ح (س = ر) = هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، .....$$

اثبت أن ت (س) = تبا (س)

ثانياً: إذا كانت السفن تصل إلى مينـاء معين بمعـدل سفينة واحـدة كل $\frac{١}{٥}$ يـوم، فما هـو احتمال وصـول سفينـة واحـدة عـلى الأقـل في اليـوم الواحد؟

(١٢ ـ ٤) تصل الطائـرات لأحد المطارات بمعدل ٣ طـائرات في السـاعة خـلال الفترة الواقعة بين الساعة الواحدة والساعة الثانية بعد الظهر. فإذا كان وصول الطائرات يتبع التوزيع البواسوني، **أوجد**

١ ـ احتمال عدم وصول أية طائرة خلال هذه الفترة من اليوم

٢ ـ احتمال وصول طائرتين خلال هذه الفترة من اليوم.

(٤ - ١٣) إذا كان احتمال أن يصاب شخص برد فعل سيء نتيجة حقنه بمصل معين هو ٠,٠٠١ وأخذنا عينة حجمها ٢٠٠٠ من الأشخاص الذين حقنوا بهذا المصل، أوجد

١ - احتمال أن يصاب شخصان برد الفعل السيء

٢ - احتمال أن يصاب أكثر من شخصين برد الفعل السيء.

(٤ - ١٤) حدّد الاحتمال المطلوب في كل من الحالات المذكورة أدناه مستخدماً كسوراً عادية أو عشرية (طبقاً لما تجده مناسباً):

أولاً إذا كان احتمال وقوع حادث معين يساوي $\frac{١}{٤}$، أوجد

١ - احتمال عدم وقوع الحادث في ٤ محاولات مستقلة

٢ - احتمال وقوع الحادث مرة واحدة على الأقل في ٤ محاولات مستقلة.

٣ - القيمة المتوقعة لعدد مرات وقوع الحادث في ٨٠ محاولة مستقلة.

٤ - التباين لعدد مرات وقوع الحادث في ٤٨ محاولة مستقلة.

ثانياً إذا كان احتمال وقوع حادث معين يساوي ٠,٠٠٠٠١، أوجد

١ - احتمال وقوع الحادث مرتين في مائتي ألف محاولة مستقلة

٢ - احتمال وقوع الحادث مرتين على الأقل في مائتي ألف محاولة مستقلة.

(٤ - ١٥) إذا كانت عيادة الطوارىء في مستشفى معيّن تستقبل في المتوسط حالتين في الساعة في الفترة من العاشرة صباحاً حتى الثانية بعد الظهر، ما هو احتمال أن تستقبل العيادة ١٠ حالات في هذه الفترة؟ وما هو احتمال أن تستقبل ٤ حالات في الساعة خلال هذه الفترة؟

وإذا كانت العيادة مجهزة لاستقبال ١٢ حالة، ما هو احتمال حدوث ازدحام في هذه العيادة؟

(٤ - ١٦) الجدول التالي يبيّن توزيع الحوادث الأسبوعية التي وقعت لـ ٦٥٠ عاملاً في صناعة البناء:

| عدد الحوادث | عدد العمال |
| --- | --- |
| صفر | ٤٥٠ |
| ١ | ١٣٢ |
| ٢ | ٤٢ |
| ٣ | ٢١ |
| ٤ | ٥ |
| المجموع | ٦٥٠ |

**والمطلوب** ١ ـ حساب قيمة كل من الوسط الحسابي والتباين لهذا التوزيع
٢ ـ توفيق نموذج توزيع بواسون لهذا التوزيع
٣ ـ التعليق على جودة مطابقة التوزيع الموفق للتوزيع المشاهد

**(١٧ ـ ٤)** إذا كان لدينا ثلاث مجموعات كما يلي:
المجموعة الأولى مكونة من ٣ رجال، ٣ نساء، ٤ أطفال
المجموعة الثانية مكونة من ٤ رجال، ٤ نساء، طفلين
المجموعة الثالثة مكونة من ٥ رجال، ٣ نساء، طفلين

١ ـ اخترنا واحداً من كل مجموعة بطريقة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون لدينا ٣ أطفال؟ وما هو احتمال أن يكون لدينا رجلين على الأقل؟

٢ ـ خلطنا المجموعات الثلاث معاً واخترنا، بدون إعادة، عينة عشوائية مكونة من ٦ أفراد، ما هو احتمال أن تحتوي هذه العينة على رجلين وامرأتين وطفلين؟ وما هو احتمال أن يكون لدينا أربعة رجال؟ أحسب القيمة المتوقعة والتباين لعدد الرجال في هذه العينة.

**(١٨ ـ ٤)** مصنع به ثلاث آلات لإنتاج سلعة معينة، أخذنا ١٠ وحدات من إنتاج الآلة الأولى، ١٠ وحدات من إنتاج الآلة الثانية، ٨ وحدات من انتاج الآلة الثالثة وخلطناها معاً.
فإذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٦ وحدات، أوجد:
١ ـ احتمال أن تحتوي هذه العينة على وحدتين من انتاج الآلة الأولى،

وحدتين من إنتاج الالة الثانية، وحدتين من إنتاج الالة الثالثة.

٢ ـ القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المختارة من إنتاج الالة الأولى.

(١٩ ـ ٤) إذا كان المتغير س له دالة كثافة احتمال

$$ح (س) = \frac{١}{١٠} \qquad صفر < س < ١٠$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

١ ـ ما اسم هذا التوزيع؟

٢ ـ أوجد: ت (س) ، تبا (س)

٣ ـ أوجد: ت (١٠ س + ٥)

٤ ـ أوجد: تبا (أ س + ب)

(٢٠ ـ ٤) يوجد في محل تجاري معين ١٥ إطاراً تبدو وكأنها متشابهة، مع أنها تحتوي على خمسة إطارات فيها خلل بسيط.
فإذا اشترى أحد الزبائن أربعة إطارات، ما هو احتمال أن يكون من بينها إطاران فيهما خلل بسيط؟

(٢١ ـ ٤) إذا كان التغيّر في عمق نهر (بالأقدام) من يوم لآخر في منطقة معينة يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال

$$ح (س) = ك \qquad -٢ < س < ٢$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

١ ـ أوجد قيمة ك وارسم دالة كثافة الاحتمال

٢ ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعي وارسم هذه الدالة

٣ ـ أوجد القيمة المتوقعة لعمق النهر في المنطقة المذكورة

٤ ـ أوجد تباين العمق في المنطقة المذكورة.

(٢٢ ـ ٤) إذا كان وقت وصول الشاحنات إلى محطة تفريغ، خلال فترة زمنية طولها ٣٠ دقيقة، يتبع التوزيع المنتظم في المدى من صفر إلى ٣٠ دقيقة، أوجد احتمال وصول شاحنة إلى هذه المحطة خلال الدقائق الخمس الأخيرة من هذه الفترة.

(٢٣ ـ ٤) إذا فرضنا أن المتغير س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = ك س$^{٤}$ هـ$^{-\frac{س}{٢}}$ ، س > صفر

= صفر فيما عدا ذلك

**أوجد** قيمة الثابت ك، ثم **أوجد** القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع

(٢٤ ـ ٤) إذا كان طول الحياة (بالساعة)، لجزء الكتروني من أجزاء التلفزيون، متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الاسي بدالة كثافة الاحتمال

ح (س) = $\frac{١}{٢٠٠}$ هـ$^{-\frac{س}{٢٠٠}}$ س > صفر

= صفر فيما عدا ذلك

**أوجد** احتمال أن يعمّر هذا الجزء ٣٠٠ ساعة فأكثر.

(٢٥ ـ ٤) سيارة تسير بأربعة عجلات، فإذا كان احتمال تعطّل العجلة الواحدة يساوي ٠,٠١، فما هو احتمال تعطّل السيارة؟ وإذا قرر سائق السيارة أن يحمل معه عجلة احتياطية واحدة، فما هو احتمال تعطّل السيارة بعد إضافة العجلة الاحتياطية؟ وإذا كانت التكلفة المترتبة على تعطّل السيارة تساوي ١٥٠ ديناراً وتكلفة إضافة العجلة تساوي عشرة دنانير، فهل تنصح السائق بإضافة عجلة احتياطية ثانية؟

(٢٦ ـ ٤) إذا كانت نسبة المعيب في الإنتاج اليومي لمصنع معيّن متغيراً عشوائياً س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = ١٢ س$^{٢}$ (١ − س) صفر ≤ س ≤ ١

= صفر فيما عدا ذلك

وإذا علم أنه لا يمكن بيع الإنتاج اليومي الذي تكون فيه نسبة المعيب أكثر من ٠,٢٥، **أوجد** احتمال عدم بيع الكمية المنتجة في يوم معين.

(٢٧ ـ ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = ٢٠ س$^{٣}$ (١ − س) صفر ≤ س ≤ ١

= صفر فيما عدا ذلك

١ ـ ارسم دالة كثافة الاحتمال

٢ ـ أوجد دالة الاحتمال التجميعي وارسم هذه الدالة

٣ ـ أوجد القيمة المتوقعة والتباين لهذا التوزيع

(٢٨ ـ ٤) إذا كانت نسبة المبيعات الأسبوعية من مخزون سلعة معينة (س) تتبع توزيع بيتا بدالة كثافة احتمال

ح (س) = ٢٠ س$^{٣}$ (١ − س)　　　صفر ≥ س ≥ ١

= صفر　　　فيما عدا ذلك

١ ـ أوجد احتمال أن تكون نسبة المبيعات أكثر من ٠,٦٠ من المخزون

٢ ـ أوجد احتمال أن تكون نسبة المبيعات أقل من ٠,٤٠ من المخزون

(٢٩ ـ ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = $\frac{١}{أ}$　　　١ ≥ س ≥ ١٠

= صفر　　　فيما عدا ذلك

١ - أوجد قيمة الثابت أ

٢ - أحسب توقع وتباين هذا التوزيع

٣ - أحسب معاملي الالتواء والتفرطح لهذا التوزيع

٤ - أوجد - ح (س ≤ ٥)

- ح (س ≥ ٣)

- ح (١ ≥ س ≥ ٧)

(٣٠ ـ ٤) إذا كانت مدة الكشف (س) التي يقضيها المريض في عيادة أحد الأطباء متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الأسي بمتوسط ١٥ دقيقة وله دالة كثالة احتمال

ح (س) = $\theta$ هـ$^{-\theta س}$　　　صفر < س < ∞

= صفر　　　فيما عدا ذلك.

١ - أوجد فيمة $\theta$

٢ - احسب تباين هذا التوزيع

٣ - ما هو احتمال أن يفضي المريض في غرفة الكشف مدة تزيد عن ٢٠ دقيقة

٤ - ما هو احتمال أن يقضي المريض في غرفة الكشف مدة تقل عن ١٠ دقائق

٥ - ما هو احتمال أن يقضي المريض في غرفة الكشف عشرة دقائق أخرى إذا علم بأنه قد مضى عليه عشرة دقائق في غرفة الكشف.

(٣١ - ٤) إذا كانت الفترة الزمنية (س) بين هبوط طائرتين متتاليتين في أحد المطارات متغيرا عشوائيا له دالة كثافة احتمال

ح (س) = $\theta$ هـ$^{-\theta س}$ صفر < س < $\infty$

= صفر فيما عدا ذلك

وبعد مراجعة السجلات وجد بأن عدد الطائرات التي هبطت في هذا المطار في ١٢٠٠ ساعة هو ٨٠٠ طائرة، والمطلوب:

١ - تقدير قيمة $\theta$

٢ - حساب احتمال أن تزيد الفترة بين هبوطين متتاليين عن ثلاث ساعات.

{ح (س ≥ ٣)}.

٣ - حساب احتمال أن تقل الفترة بين هبوطين متتاليين عن ساعة واحدة {ح(س ≤ ١)}.

٤ - حساب احتمال أن تتراوح الفترة بين هبوطين متتاليين بين ساعة واحدة وخمس ساعات {ح (١ ≤ س ≤ ٥)}.

(٣٢ - ٤) إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة احتمال

ح (س) = أ جـ ≤ س ≤ د

= صفر فيما عدا ذلك

وكان ت (س) = ٧

تبا (س) = ٤

أوجد قيمة كل من جـ ، د

(٤ ـ ٣٣) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع بواسون بمعلمة $\theta$، أوجد العزم الواوي حول الصفر باستخدام الدالة المولدة للعزوم.

(٤ ـ ٣٤) إذا كـان المتغير العشـوائي س لـه تـوزيـع جـامـا بمعلمـة ن، أوجـد: ت (س) ، تبا (س) ، العزم الواوي حول الصفر لهذا التوزيع

(٤ ـ ٣٥) إذا كـان المتغير العشـوائي س له تـوزيع بيتـا بمعلمتين م ، ن أوجـد: ت (س) ، تبا (س)، العزم الواوي حول الصفر لهذا التوزيع.

(٤ ـ ٣٦) إذا كان انتاج إحدى السلع يتم على ثـلاث مراحـل وطول كـل مرحلة من هـذه المراحـل يتبع التـوزيـع الاسي بمتـوسط ٢٠ دقيقـة للمـرحلة الأولى، ٣٠ دقيقة للمرحلة الثانية، ١٠ دقائق للمرحلة الثالثة

١ ـ ما هي الفترة الزمنية المتوقعة لانتاج الوحدة الواحدة من هذه السلعة ؟

٢ ـ ما هو احتمال أن تزيد مدة المرحلة الأولى عن ٣٥ دقيقة ؟

٣ ـ ما هو احتمال أن تقل مدة المرحلة الثالثة عن ٥ دقائق ؟

٤ ـ ما هو احتمال أن تتراوح مدة المرحلة الأولى بين ١٥ و ٢٥ دقيقة ؟

٥ ـ ما هو احتـمال انتاج الـوحدة الـواحدة في أقـل من ساعـة إذا علم بأنها قد امضت ٢٨ دقيقة في المرحلة الأولى و ٢٢ دقيقة في المرحلة الثانية ؟

(٤ ـ ٣٧) إذا كانت مدة المكالمة الخارجية التي تـرد إلى أحد المقـاسم الدوليـة تتبع التوزيع الاسي بدالة كثافة احتمال

ح (س) = $\theta$ هـ$^{-\theta س}$ س > صفر

ومن مـراجعة سجـلات المقسم وجد بـأن ١٠٠ مكالمـة استغـرقت ٦٠ ساعة:

١ ـ أوجد قيمة $\theta$

٢ ـ ما هو احتمال أن يقل وقت المكالمة عن دقيقتين ؟

٣ ـ ما هو احتمال أن تزيد مدة المكالمة عن خمس دقائق ؟

٤ ـ إذا كـان متوسط تكلفـة الدقيقـة الواحـدة ١,١٠ دينـار، مـا هـو احتمال أن تزيد تكلفة المكالمة عن عشرة دنانير؟

# الباب الخامس

## توزيعات العينات الصغيرة والكبيرة

## The Large and Small Samples Distributions

لدراسة أية ظاهرة من الظواهر أو أية مشكلة من المشاكل فإنه لا بد للباحث من أن يقوم أولاً وقبل كل شيء بجمع المعلومات والبيانات الإحصائية اللازمة لمثل هذه الدراسة. هذا ويمكن أن يتم جمع البيانات عن مثل هذه الظاهرة أو الظواهر أما بالحصر الشامل لكافة عناصر المجتمع محل الدراسة أو بأخذ عينة عشوائية من عناصر هذا المجتمع، ومن ثم يقوم الباحث بتعميم النتائج التي يتم الحصول عليها من العينة على المجتمع ككل.

فإذا فرضنا أن ح (س، $\theta$) هي دالة كثافة الاحتمال لمجتمع الدراسة بمعلمة واحدة $\theta$ وكانت $\theta$ معلومة فإنه يمكن تحديد دالة كثافة الاحتمال ح (س، $\theta$) بالكامل ولا تكون هنالك أية ضرورة لعملية المعاينة من أجل الحصول على تقدير لهذه المعلمة. هذا وستتم مناقشة موضوع التقدير الاحصائي بالتفصيل في الباب السادس من هذا الكتاب.

فمثلاً إذا كانت ح (س، $\theta$) هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي س فإن $\mu$ = ت(س) هي متوسط المجتمع، وإذا كان المجتمع غير محدود فإن $\mu$ هي متوسط عدد غير محدود من قيم المتغير العشوائي س. وتقوم فكرة المعاينة على إختيار عينة عشوائية محدودة من قيم المتغير س واستخدام بيانات هذه العينة لتقدير معالم المجتمع محل الدراسة، والقضية الأساسية التي تطرحها نظرية المعاينة هي: هل يمكن استخدام عدد محدود من قيم المتغير العشوائي س (عينة محدودة حجمها ن مثلاً) للحصول على تقادير موثوقة لمعالم المجتمع، كأن نستخدم مثلاً الوسط الحسابي $\overline{س}$ لمفردات هذه

العينة المحدودة من قيم المتغير العشوائي س كتقدير لمتوسط المجتمع؟

إن الجواب على مثل هذا السؤال هو بالإيجاب ولولا ذلك لما كان بالإمكان الاعتماد على العينات العشوائية المحدودة للحصول على تقديرات لمعالم أي مجتمع إحصائي مثل $\mu$، $\sigma^2$ وفي هذا الباب نتحدث عن أمور لها صلة مباشرة بالمعانية الإحصائية وتوزيعات العينات الكبيرة والصغيرة مثل قانون الأعداد الكبيرة، نظرية النزعة المركزية، التوزيع الطبيعي، توزيع (ت)، توزيع كاي تربيع، وتوزيع (ف).

# الفصل الأول

## قانون الأعداد الكبيرة ونظرية النزعة المركزية.

سوف نقوم في هذا الفصل بعرض نظريتين من أهم النظريات التي لها صلة كبيرة بنظرية المعاينة Sampling Theory:

١ ـ قانون الأعداد الكبيرة

٢ ـ نظرية النزعة المركزية

### (١ ـ ١ ـ ٥) قانون الأعداد الكبيرة

بالنظر إلى أهمية هذا القانون فسوف نستعرض من خلاله أربع نظريات هامة لها صلة مباشرة بقانون الاعداد الكبيرة:

| | |
|---|---|
| ـ نظرية بينيه | Byne' Theorem |
| ـ متباينة تشيبتشيف | Tchebeysheff's Inequality |
| ـ قانون الأعداد الكبيرة | The Law of Large Numbers |
| ـ نظرية ديموافر | De Moivre's Theorem |

١ ـ نظرية بينيه

تنص نظرية بينيه على ما يلي: إذا كان لدينا متغير عشوائي غير سالب س (أي أن صفر $\leqslant$ س $\leqslant \infty$) وكانْ ت (س) = $\mu$

فإن

$$ح\ (س \geqslant ك\ \mu) < \frac{١}{ك} \qquad (١ - ١ - ٥)$$

حيث ك ثابت إختياري غير سالب

**البرهان :**

إذا فرضنا أن ح (س) هي دالة كثافة الإحتمال للمتغير العشوائي المتصل س في المدى صفر ≥ س ≥ $\infty$ ، فإن

$$\mu = \text{ت (س)} = \int_{0}^{\infty} \text{س ح (س) د س}$$

$$= \int_{0}^{\text{ك}\mu} \text{س ح (س) د س} + \int_{\text{ك}\mu}^{\infty} \text{س ح (س) د س} \qquad (٢ - ١ - ٥)$$

من المعلوم أن :

$$\int_{\text{ك}\mu}^{\infty} \text{س ح (س) د س} \geqslant \text{(ك} \mu\text{)} \int_{\text{ك}\mu}^{\infty} \text{ح (س) د س} \quad ، \qquad (٣ - ١ - ٥)$$

$$\text{(ك} \mu\text{)} \int_{\text{ك}\mu}^{\infty} \text{ح (س) د س} = \text{(ك} \mu\text{) ح (س} \geqslant \text{ك} \mu\text{)} \quad ، \qquad (٤ - ١ - ٥)$$

$$\int_{0}^{\text{ك}\mu} \text{س ح (س) د س} \geqslant \text{صفر} \qquad (٥ - ١ - ٥)$$

وبالتعويض عن (٣ ـ ١ ـ ٥)، (٤ ـ ١ ـ ٥)، (٥ ـ ١ ـ ٥) في (٢ ـ ١ ـ ٥) فإن :

$$\text{ت (س)} \geqslant \text{(ك} \mu\text{) ح (س} \geqslant \text{ك} \mu\text{)} \qquad (٦ - ١ - ٥)$$

وحيث أن ت (س) = $\mu$ فإننا نجد من (٦ ـ ١ ـ ٥) أن :

$$\text{ح (س} \geqslant \text{ك} \mu\text{)} \leqslant \frac{١}{\text{ك}} \qquad (٧ - ١ - ٥)$$

**مثال ١ :**

إذا علم أن متوسط عمر المصباح الكهربائي الذي تنتجه إحدى الشركات هو $\mu$ = ١٢٠٠ ساعة فإننا ومن نظرية بينيه Byne' Theorem نستطيع القول بأن إحتمال أن يزيد عمر أي مصباح من إنتاج هذه الشركة عن ١٢٠٠ ساعة هو

$$\text{ح (س} \geqslant ١٢٠٠\text{)} < \frac{١}{١}$$

$$\text{ح (س} \geqslant ١٢٠٠\text{)} < ١$$

حيث س = عمر المصابح الكهربائي

ك = ١

وكذلك إحتمال أن يزيد عمر المصباح الكهربائي من إنتاج هذه الشركة عن ١٨٠٠ ساعة هو

$$ح\ (س \geqslant ١٨٠٠) < \frac{١}{١,٥}$$

$$ح\ (س \geqslant ١٨٠٠) < ٠,٦٦٧$$

حيث ك = ١,٥ في هذه الحالة،

واحتمال أن يزيد عمر المصباح الكهربائي من إنتاج هذه الشركة عن ٢٤٠٠ ساعة هو

$$ح\ (س \geqslant ٢٤٠٠) < \frac{١}{٢}$$

$$ح\ (س \geqslant ٢٤٠٠) < ٠,٥$$

حيث ك = ٢ في هذه الحالة.

**٢ - متباينة تشيبتشيف**

من الواضح أنه كلما كان الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي س صغيراً كلما كانت قيمة هذا المتغير لا تختلف اختلافاً كبيراً عن القيمة المتوقعة لهذا المتغير $\mu$، وعليه فإنه يمكن الحكم بصورة تقريبية على مدى الاختلاف بين قيم المتغير العشوائي س والقيمة المتوقعة له، علماً بأن هذا لا يعطي تقديراً كمياً لاحتمالات إنحراف قيم س عن توقعها .وقد اقترح العالم الروسي تشيبتشيف (لأول مرة) في منتصف القرن التاسع عشر حلاً لهذه المسألة:

تنص نظرية تشيبتشيف على أنه إذا كان لدينا متغير عشوائي غير سالب مثل س (صفر $\leqslant$ س $\leqslant \infty$) وكان ت (س) = $\mu$ وتبا (س) = $\sigma^٢$ فإن

$$ح\ (|س - \mu| > ك\ \sigma) < \frac{١}{ك^٢} \qquad (٨ - ١ - ٥)$$

حيث ك ثابت إختياري موجب

ويمكن إثبات هذه النظرية كما يلي:

إذا كانت ح (ص) دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي غير السالب ص (صفر $\leqslant$ ص $\leqslant \infty$) فإن العزم الواوي حول الصفر لهذا المتغير هو:

$$\mu'_{ر} = \int_{0}^{\infty} ص^{ر} ح(ص)\, د ص$$

$$= \int_{0}^{أ} ص^{ر} ح(ص)\, د ص + \int_{أ}^{\infty} ص^{ر} ح(ص)\, د ص \qquad (٩ - ١ - ٥)$$

حيث

أ ثابت إختياري غير سالب.

من المعلوم أن

$$\left.\begin{array}{l} \int_{0}^{أ} ص^{ر} ح(ص)\, د ص \geqslant صفر، \\ \int_{أ}^{\infty} ص^{ر} ح(ص)\, د ص \geqslant أ^{ر} \int_{أ}^{\infty} ح(ص)\, د ص، \\ أ^{ر} \int_{أ}^{\infty} ح(ص)\, د ص = أ^{ر} ح(ص \geqslant أ) \end{array}\right\} \qquad (١٠ - ١ - ٥)$$

وبالتعويض من (١٠ - ١ - ٥) في (٩ - ١ - ٥) فإن

$$ت(ص^{ر}) \geqslant أ^{ر} ح(ص > أ) \qquad (١١ - ١ - ٥)$$

لنفرض أن:

$ص = |س - ت(س)|$ وهذا مقدار موجب يتراوح بين صفر و $\infty$

$$ت(س) = \mu$$

$$أ = ك\, \mu_{ر}^{\frac{1}{ر}}$$

حيث ك ثابت إختياري غير سالب

فإن المعادلة (١١ - ١ - ٥) تؤول إلى

$$ت(|س - ت(س)|^{ر}) \geqslant ك^{ر} \mu_{ر} ح(|س - ت(س)| > ك\, \mu_{ر}^{\frac{1}{ر}}) \qquad (١٢ - ١ - ٥)$$

وحيث أن $ص = |س - ت(س)|$ كما سبق أن فرضنا فإن (١٢ - ١ - ٥) يمكن كتابتها كما يلي

$$\mu_{ر} \geqslant ك^{ر} \mu_{ر} ح(|س - ت(س)| > ك\, \mu_{ر}^{\frac{1}{ر}}) \qquad (١٣ - ١ - ٥)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (١٣ - ١ - ٥) على $\mu_{ر} ك^{ر}$ فإن هذه المعادلة تؤول إلى

$$ح(|س - ت(س)| > ك\, \mu_{ر}^{\frac{1}{ر}}) \leqslant \frac{1}{ك^{ر}} \qquad (١٤ - ١ - ٥)$$

وإذا وضعنا و = ٢ للحصول على التباين

فإن

$$ح\left(|س - ت(س)| > ك\,\mu_{٢}^{\frac{١}{٢}}\right) \leqslant \frac{١}{ك^{٢}}$$

أي أن

$$ح\left(|س - ت(س)| > ك\,\sigma_{س}\right) \leqslant \frac{١}{ك^{٢}}$$

أي أن

$$ح\left(|س - \mu| > ك\,\sigma_{س}\right) \leqslant \frac{١}{ك^{٢}} \qquad (١٥ - ١ - ٥)$$

وهذه الحالة الخاصة هي ما يسمى بنظرية (أو متباينة) تشبيتشيف.

كما يمكن إثبات نظرية تشبيتشيف بطريقة أخرى على النحو التالي:

من المعلوم أن العلاقة بين $|س - \mu|$، $(س - \mu)^{٢}$ هي علاقة تقابليـة وحيدة وبالتالي فإن:

$$ح(|س - \mu| > ك\,\sigma) = ح\left((س - \mu)^{٢} > ك^{٢}\sigma^{٢}\right) \qquad (١٦ - ١ - ٥)$$

فإذا فرضنا أن $(س - \mu)^{٢}$ = ص فإن المتغير العشوائي ص هو متغير غير سالب (صفر $\leqslant$ ص $\leqslant \infty$) و ت (ص) = $\sigma^{٢}$ وباستخدام نظرية بينية نجد أن

$$ح\left(ص > ك\,ت(ص)\right) < \frac{١}{ك} \qquad (١٧ - ١ - ٥)$$

أي أن

$$ح\left((س - \mu)^{٢} > ك\,\sigma^{٢}\right) < \frac{١}{ك} \qquad (١٨ - ١ - ٥)$$

وحيث أن ك هو ثابت إختياري فإننا نستطيـع أن نضع $ك^{٢}$ بـدلاً من ك وتصبح المعادلة (١٨ ـ ١ ـ ٥) على النحو التالي:

$$ح\left((س - \mu)^{٢} > ك^{٢}\sigma^{٢}\right) < \frac{١}{ك^{٢}} \qquad (١٩ - ١ - ٥)$$

وباستخدام العلاقة التقابلية الوحيدة بين $|س - \mu|$ و$(س - \mu)^{٢}$ نجد أن

$$ح\left(|س - \mu| > ك\,\sigma\right) < \frac{١}{ك^{٢}} \qquad (٢٠ - - ٥)$$

**مثال ٢ :**

بالاشارة إلى المثال (١)، إذا سحبنا عينة عشوائية حجمها ن = ١٠٠ مصباح من إنتاج المصنع وحسبنا متوسط عمر المصباح الكهربائي ($\overline{س}$) من هذه العينة، وحيث أن

$$ت(س) = ت(\overline{س}) = \mu = ١٢٠٠ \text{ ساعة}$$

وإذا فرضنا أن

$$\sigma_{س}^{٢} = ١٠٠٠٠$$

فان $\qquad \sigma_{\overline{س}}^{٢} = \frac{\sigma_{س}^{٢}}{ن} = \frac{١٠٠٠٠}{١٠٠} = ١٠٠$

$$\sigma_{\overline{س}} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$$

ومن نظرية تشيبتشيف (٨ ـ ١ ـ ٥) نجد أن

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ك \times ١٠) < \frac{١}{ك^{٢}}$$

فإذا أخذت ك القيم التالية فإن:

$$ك = ١$$

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ١٠) < ١$$

$$ك = ٢$$

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ٢٠) < ٠,٢٥٠$$

$$ك = ٣$$

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ٣٠) < ٠,١١١$$

$$ك = ٤$$

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ٤٠) < ٠,٠٦٣$$

$$ك = ٥$$

$$ح(|\overline{س} - ١٢٠٠| > ٥٠) < ٠,٠٤٠$$

$$ك = \sqrt[٤]{ن} = ن^{\frac{١}{٤}} = (١٠٠)^{\frac{١}{٤}}$$

$$ح\left(|\overline{س} - ١٢٠٠| > \frac{١٠٠}{(١٠٠)^{\frac{١}{٤}}}\right) < \frac{١}{\sqrt{١٠٠}}$$

وبشكل عام إذا فرضنا أن ك = $ن^{\frac{1}{4}}$ فإن

$$ح\left(|\bar{س} - \mu| > \frac{\sigma}{ن^{\frac{1}{4}}}\right) < \frac{1}{\sqrt{ن}} \qquad (٢١ - ١ - ٥)$$

العلاقة (٢١ - ١ - ٥) توضح بأن نسبة العينات ذات الحجم المتساوي ن والتي تعطي متوسطا $\bar{س}$ خارج الفترة $\mu \pm \frac{\sigma}{ن^{\frac{1}{4}}}$ تقل عن $\frac{1}{\sqrt{ن}}$. ولقد تم إختيار ك = $ن^{\frac{1}{4}}$ بحيث تضيق الفترة عندما يكبر حجم العينة، وعندما يصبح حجم العينة ن كبيراً جداً (ن ← ∞) فإن إحتمال أن تكون $\bar{س}$ مختلفة عن $\mu$ يؤول إلى الصفر، وفي هذه الحالة يقال بأن $\bar{س}$ هي تقدير متسق Consistent لمتوسط المجتمع $\mu$، وهو ما سيتم شرحه في الباب السادس من هذا الكتاب.

وإذا كان لدينا مجموعة من التجارب المتكررة المستقلة ن وكان إحتمال النجاح في أية تجربة من هذه التجارب هو ح وكان المتغير العشوائي س = $\frac{ر}{ن}$ حيث ر هي عدد مرات النجاح في هذه التجارب المتكررة فإن القيمة المتوقعة والتباين لهذا المتغير هما:

$$ت(س) = ت\left(\frac{ر}{ن}\right) = ح \qquad (٢٢ - ١ - ٥)$$

$$\sigma^2_{س} = \sigma^2_{\frac{ر}{ن}} = \frac{ح(١ - ح)}{ن} \qquad (٢٣ - ١ - ٥)$$

ومن نظرية تشيبتشيف (المعادلة (١٥ - ١ - ٥)) نجد أن

$$ح(|س - ت(س)| > ك\,\sigma_{س}) < \frac{1}{ك^2} \qquad (٢٤ - ١ - ٥)$$

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ح\right| > ك\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}\right) < \frac{1}{ك^2} \qquad (٢٥ - ١ - ٥)$$

فإذا أخذنا ك = $ن^{\frac{1}{4}}$ فإن

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ح\right| > \frac{\sqrt{ح(١ - ح)}}{ن^{\frac{1}{4}}}\right) < \frac{1}{\sqrt{ن}} \qquad (٢٦ - ١ - ٥)$$

وهذا يعني أن إحتمال إختلاف النسبة في العينة، $\frac{ر}{ن}$، عن النسبة الحقيقية في المجتمع، ح، يؤول إلى الصفر عندما يؤول حجم العينة ن إلى ما لا نهاية.

**مثال ٣:**

إذا كانت نسبة المدخنين بين طلاب الجامعة الأردنية ح = ٠,٣٠، وأخذنا عينة من هؤلاء الطلاب حجمها ن = ١٠٠ وكان عدد المدخنين في هذه العينة هو ر فإن

$$ت\left(\frac{ر}{ن}\right) = ٠,٣٠$$

$$\sigma^{٢}_{\frac{ر}{ن}} = \frac{٠,٣\,(١-٠,٣)}{١٠٠} = \frac{٠,٢١}{١٠٠}$$

وبتطبيق نظرية تشيبتشيف (معادلة رقم (٨ ـ ١ ـ ٥)) فإن

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ٠,٣\right| > ك \times \sqrt{\frac{٠,٢١}{١٠٠}}\right) < \frac{١}{ك^{٢}}$$

وإذا أخذت ك القيم التالية فإن:

ك = ١

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ٠,٣\right| > \sqrt{\frac{٠,٢١}{١٠٠}}\right) < ١$$

ك = ٢

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ٠,٣\right| > ٢ \times \sqrt{\frac{٠,٢١}{١٠٠}}\right) < \frac{١}{٤}$$

ك = ٣

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ٠,٣\right| > ٣ \times \sqrt{\frac{٠,٢١}{١٠٠}}\right) < \frac{١}{٩}$$

ك = ٤

$$ح\left(\left|\frac{ر}{ن} - ٠,٣\right| > ٤ \times \sqrt{\frac{٠,٢١}{١٠٠}}\right) < \frac{١}{١٦}$$

٣ - قانون الأعداد الكبيرة

إذا كان لدينا ن من الكميات العشوائية المستقلة $س_{١}$، $س_{٢}$، . . . ، $س_{ن}$ بحيث أن القيمة المتوسطة والتباين لكل منها يساويان $\mu$، $\sigma^{٢}$ على التوالي فإن الوسط الحسابي لها جميعاً هو:

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \ldots + س_ن}{ن}$$

$$ت(\overline{س}) = \mu \qquad تبا(\overline{س}) = \sigma^2_{\overline{س}} = \frac{\sigma^2}{ن}$$

وبتطبيق متباينة تشيبتشيف (المعادلة (٨ ـ ١ ـ ٥)) فإن

$$ح(|\overline{س} - \mu| > ك\,\sigma_{\overline{س}}) < \frac{١}{ك^٢} \qquad (٢٧ ـ ١ ـ ٥)$$

$$ح(|\overline{س} - \mu| > ك\,\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}) < \frac{١}{ك^٢} \qquad (٢٨ ـ ١ ـ ٥)$$

من المعادلة (٢٨ ـ ١ ـ ٥) نجد أن إحتمال أن تتساوى القيمتان $\overline{س}$ ، $\mu$ يقترب من الواحد الصحيح إقتراباً كافياً عندما تقترب ن قربا كافيا من ∞ (أي أن تصبح ن كبيرة كبرا كافيا). وهذه هي أبسط الحالات الخاصة لقانون الأعداد الكبيرة والتي أثبتها عالم الرياضيات تشيبتشيف.

وينص قانون الأعداد الكبيرة على ما يلي: مع أن بعض الكميات العشوائية المنفردة تأخذ في الغالب قيما بعيدة عن قيمتها المتوسطة الا أن الوسط الحسابي لعدد كبير من هذه الكميات العشوائية يتشتت تشتتا صغيرا جداً ويأخذ في المتوسط قيما قريبة جدا من قيمته المتوسطة وباحتمال كبير جداً.

ومن هذه النظرية يمكن أن نستنتج بأننا نستطيع الحكم على نوعية كمية كبيرة من مادة متجانسة بواسطة عد صغير نوعاً ما من العينات. فللحكم على نوعية القطن في بالة من البالات أو القمح في شحنة من الشحنات مثلاً فإننا نأخذ عشوائياً عينات صغيرة من أماكن مختلفة من البالة أو شحنة القمح . وتعتبر طريقة الإختبار التي تعتمد على هذا الاختيار العشوائي على درجة كبيرة من الدقة، ذلك لأن كمية القطن أو كمية القمح المأخوذة كعينة ولو كانت ضئيلة بالنسبة للبالة أو شحنة القمح كلها الا أنها في حد ذاتها كبيرة وتسمح تبعاً لقانون الأعداد الكبيرة بالحكم على مواصفات القطن في البالة أو القمح في الشحنة بدقة كافية.

وبصورة عامة إذا كانت لدينا الكميات العشوائية المستقلة $س_١$، $س_٢$، . . . ، $س_ن$ ومتوسطاتها $\mu_١$، $\mu_٢$، . . . ، $\mu_ن$ غير متساوية، وتبايناتها $\sigma^2_١$، $\sigma^2_٢$، . . . ،

$\sigma^2_{ن}$ غير متساوية أيضاً فإن

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + \ldots + س_ن}{ن}$$

$$ت(\bar{س}) = \mu = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_ن}{ن}$$

$$تبا(\bar{س}) = \sigma^2_{\bar{س}} = \frac{\sigma^2_1 + \sigma^2_2 + \ldots + \sigma^2_ن}{ن^2}$$

وبتطبيق نظرية تشيبيتشيف (المعادلة (٨ ـ ١ ـ ٥)) نجد أن

$$ح\left(|\bar{س} - \mu| > ك\sigma^2_{\bar{س}}\right) > \frac{1}{ك^2} \qquad (٢٩ - ١ - ٥)$$

وذلك بفرض أن $\sigma^2$ لجميع هذه القيم العشوائية أقل من مقدار موجب معين مثل $أ^2$، وهذا الشرط غالباً ما يتحقق بصورة عملية لأننا في معظم الأحيان نتعامل مع كميات عشوائية من نوع واحد ولا يختلف تشتت هذه الكميات عن بعضها البعض الا اختلافاً ضئيلاً، أي أن

$$\sigma^2_ر < أ^2 \qquad ر = ١، ٢، \ldots ، ن$$

$$\sigma^2_{\bar{س}} < \frac{1}{ن^2} ن أ^2 = \frac{أ^2}{ن} \qquad (٣٠ - ١ - ٥)$$

ومن المعادلة (٢٩ ـ ١ ـ ٥) نجد أنه إذا كانت ن كبيرة كبراً كافياً فإن إحتمال أن يكون إختلاف $\bar{س}$ عن $\mu$ صغيراً صغرا كافيا يقترب من الواحد الصحيح بدرجة كبيرة جداً وهذا هو قانون الأعداد الكبيرة في صيغته العامة التي أثبتها تشيبيتشيف.

**٤ ـ نظرية ديموافر**

تنص نظرية ديموافر على ما يلي: إذا أخذت عينه عشوائية حجمها ن من مفردات مجتمع كبير جداً (لا نهائي) ووجد بأن ر مفردة من مفردات هذه العينة تحمل صفة معينة باحتمال ح فإنه كلما كبر حجم العينة ن اقترب توزيع العدد ر من التوزيع الطبيعي الذي توقعه ن ح وتباينه ن ح (١ − ح)، أي أن المقدار:

$$\frac{ر - ن ح}{\sqrt{ن ح (١ - ح)}} \qquad (٣١ - ١ - ٥)$$

هو متغير له توزيع طبيعي قياسي متوسطه يساوي صفر وتباينه يساوي الواحد

الصحيح، وبالقسمة على ن بسطا ومقاما نجد أن

$$ي = \frac{\frac{ر}{ن} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}} \qquad (٣٢ - ١ - ٥)$$

وهذا يعني أن نسبة المفردات التي تحمل صفة معينة ($\frac{ر}{ن}$) والمحسوبة من العينة لها توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي الذي توقعه ح وتباينه $\frac{ح(١ - ح)}{ن}$ كلما زادت قيمة ن.

ويمكن إثبات هذه النظرية باستخدام الدالة المولدة للعزوم أو الدالة المميّزة.

وترجع إهمية نظرية ديموافر إلى أنها تساعد على تحليل نتائج العينات الكبيرة في حالة المتغيرات النوعية وذلك بتطبيق خصائص التوزيع الطبيعي عليها. وسوف نتعرض لهذا الموضوع بالتفصيل في الباب السادس من هذا الكتاب.

### (٢ - ١ - ٥) نظرية النزعة المركزية

تحدثنا فيما سبق عن نظرية الأعداد الكبيرة وأثرها في تقدير معالم المجتمع من العينات الكبيرة، وسوف نتحدث هنا عن نظرية أخرى لها أثر كبير في تطور نظرية العينات وهي نظرية النزعة المركزية.

إذا كانت $س_١$، $س_٢$ . . . ، $س_ن$ متغيرات عشوائية معتادة ومستقلة بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^٢$ أي أن $ت(س_ر) = \mu$، $تبا(س_ر) = \sigma^٢$، ر = ١ ، ٢ ، . . . ، ن فإن المتغير العشوائي.

$$س = س_١ + س_٢ + . . . . + س_ن$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

له توزيع طبيعي توقعه: $ت(\sum_{ر=١}^{ن} س_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ت(س_ر) = ن\mu$

وتباينه $تبا(\sum_{ر=١}^{ن} س_ر) = \sum_{ر-١}^{ن} تبا(س_ر) = ن\sigma^٢$

أما إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة $س_١$، $س_٢$، . . . ، $س_ن$ لا تتبع

التوزيع الطبيعي، فما هو توزيع مجموع هذه المتغيرات؟ إن نظرية النزعة المركزية والتي ذكرها لابلاس لأول مرة سنة ١٨١٢ تجيب على هذا السؤال، وفيما يلي نص هذه النظرية: إذا كانت $س_١$، $س_٢$، . . .، $س_ن$ متغيرات عشوائية مستقلة ولها نفس التوزيع بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$، أي أن ت ($س_ر$) = $\mu$، تبا ($س_ر$) = $\sigma^2 < \infty$، فإن المتغير العشوائي

$$س = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

يكون له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت قيمة ن، توقعه ن $\mu$ وتباينه ن $\sigma^2$.

في مثل هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي تقاربي Asymptotic Normal وقد تمكن ليابنوف Liapounoff من الوصول إلى برهان دقيق لهذه النظرية تحت شروط عامة لأول مرة سنة ١٩٠١. كما أنه يمكن إثبات هذه النظرية باستخدام الدالة المميزة.

هذا ويمكن تطبيق نظرية النزعة المركزية بشكل أشمل، فإذا سحبنا عينة عشوائية حجمها ن من المتغيرات العشوائية المستقلة $س_١$، $س_٢$، . . .، $س_ن$ من أي مجتمع متوسطة $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ بغض النظر عن التوزيع الذي يتبعه، وكانت $\mu$، $\sigma^2$ كميتين محدودتين، فإن المتغير العشوائي

$$\bar{س} = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} س_ر$$

يكون له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu$ وتباين $\frac{\sigma^2}{ن}$ كلما زاد حجم العينة ن وبالمثل فإن المقدار

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}} \qquad (٥ - ١ - ٣٣)$$

يكون له توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي كلما زاد حجم العينة ن.

وترجع أهمية نظرية النزعة المركزية إلى أنها تمكننا من معرفة توزيع المعاينة للوسط الحسابي ($\bar{س}$) لعينة مأخوذة من مجتمع ما دون معرفة توزيع هذا المجتمع.

فإذا كان حجم العينة كبيراً (ن > ٥٠) فإن توزيـع المعاينـة للمقياس الإحصـائي س̄ يقـترب من التوزيـع الـطبيعي كلما زاد حجم العينـة، وتعتـبر هـذه القـاعـدة من أهم القواعد التي تُبنى عليهـا نظريـة المعاينـة في الإحصاء والتي أفسحت مجـالاً واسعاً أمـام إستخدام المعاينة كوسيلة لدراسة المجتمعات الاحصائية.

# الفصل الثاني

## التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي بلا شك أهم التوزيعات الإحصائية (المتصلة وغير المتصلة) على الإطلاق وأكثرها استخداماً، حيث أن أكثر الأساليب والطرق الأحصائية تعتمد على هذا التوزيع بشكل أو بآخر. هذا بالإضافة إلى أن التوزيعات الإحصائية المختلفة تنتهي، وعند توفر شروط معينة كما تم شرحه في الفصل الأول من هذا الباب، إلى التوزيع الطبيعي. ويشتمل هذا الفصل والفصل الذي يليه على دراسة التوزيع الطبيعي الذي يعرف بتوزيع العينات الكبيرة Large Samples Distribution وبعض التوزيعات المتصلة به والتي تعرف بتوزيعات العينات الصغيرة Small Samples Distributions

**(١ - ٢ - ٥) تعريف**

إذا كان المتغير العشوائي س له دالة كثافة الإحتمال

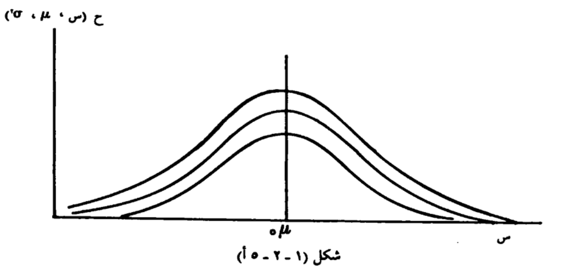
$$ح(س؛ \mu، \sigma^{٢}) = \frac{١}{\sigma\sqrt{٢\pi}} هـ^{-\frac{١}{٢\sigma^{٢}}(س-\mu)^{٢}} \qquad (٣٤ - ٢ - ٥)$$

$$- \infty < س < \infty$$

$$- \infty < \mu < \infty$$

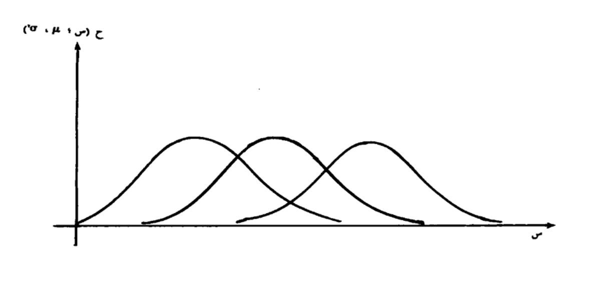
$$\sigma^{٢} > صفر$$

فإننا نقول بأن المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي بمعلمتين $\mu$، $\sigma^{٢}$ حيث هما المتوسط والتباين على التوالي. ويمثل الشكل (١ - ٢ - ٥أ) منحنى دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي لقيمة واحدة للمتوسط $\mu$. وقيم مختلفة للتباين $\sigma^{٢}$




شكل (١ - ٢ - ٥ أ)

والشكل (١ - ٢ - ٥ ب) يمثل دالة كثافة الإحتمال لقيمة واحدة للتباين $\sigma^2$ وقيم مختلفة للوسط الحسابي $\mu$




شكل (١ - ٢ - ٥ ب)

يتّضح من هذين الشكلين أن منحنى دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي: متماثل وذو قمة واحدة وطرفاه يمتدان الى $\pm \infty$ ولا يقابلان المحور السيني بل يقتربان منه.

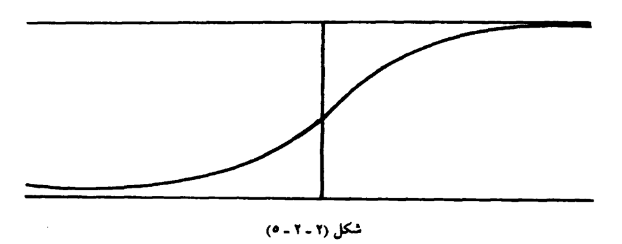
ويطلق على المنحنى الطبيعي أو المعتدل في بعض الأحيان اسم منحنى جاوس Gaussian Distribution نسبة إلى مكتشفه الأول جاوس. وقد اكتشف هذا التوزيع عام ١٧٣٣ وقد اكتشفه في نفس الوقت كل من دي موافر De Moivre ولا بلاس

Laplace وبسبب تعـدد مكتشفي هذا التـوزيع أطلق عليـه إسم التوزيـع الطبيعي أو المعتدل.

أما دالة الاحتمال التجميعي ح (س) فيمكن حسابها كما يلي:

$$ح(س) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{س} هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}(س-\mu)^2} ء س \qquad (٣٥ - ٢ - ٥)$$

ويمكن رسم هذه الدالة كما هو مبين في الشكل (٢ - ٢ - ٥)



شكل (٢ - ٢ - ٥)

**(٢ - ٢ - ٥) عزوم التوزيع الطبيعي**

يمكن حساب العزوم حول الصفر للتوزيع الطبيعي باستخدام المعادلة (٣ - ٢ -٣)

وبالتالي فإن

$$\mu'_و = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} س^و هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}(س-\mu)^2} دس \qquad (٣٦ - ٢ - ٥)$$

وإذا استخدمنا التعويض ص $= \frac{س - \mu}{\pi}$ $\quad -\infty <$ ص $< \infty$

فإن

س $= \sigma$ ص $+ \mu$

دس $= \sigma$ د ص

وبالتعويض في (٣٦ - ٢ - ٥) فإن

$$\mu'_و = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{-1/2 ص^2} (\sigma ص + \mu)^و دص \qquad (٣٧ - ٢ - ٥)$$

ومن هذه المعادلة نجد أن

$$\mu'_{١} = \mu$$

$$\mu'_{٢} = \sigma^{٢} + \mu^{٢} \qquad (٣٨ - ٢ - ٥)$$

$$\mu'_{٣} = ٣\mu\,\sigma^{٢} + \mu^{٣}$$

$$\mu'_{٤} = ٣\,\sigma^{٤} + ٦\,\mu^{٢}\,\sigma^{٢} + \mu^{٤}$$

ومن العلاقات بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي (معادلة (٦ - ٢ - ٣)) نجد أن

$$\mu_{٢} = \sigma^{٢}$$

$$\mu_{٣} = \text{صفر} \qquad (٣٩ - ٢ - ٥)$$

$$\mu_{٤} = ٣\,\sigma^{٤}$$

وبالتعويض من (٣٩ - ٢ - ٥) في معادلة (١٠ - ٢ - ٣) ومعادلة (١١ - ٢ - ٣) فإن معاملي الالتواء والتفرطح $\beta_{١}$ ، $\beta_{٢}$ هما

$$\beta_{١} = \frac{\mu_{٣}^{٢}}{\mu_{٢}^{٣}} \qquad (٤٠ - ٢ - ٥)$$

$$= \text{صفر}$$

$$\beta_{٢} = \frac{\mu_{٤}}{\mu_{٢}^{٢}}$$

$$= \frac{٣\,\sigma^{٤}}{\sigma^{٤}} \qquad (٤١ - ٢ - ٥)$$

$$= ٣$$

أي أن التوزيع الطبيعي متماثل حول الوسط الحسابي ($\beta_{١}$ = صفر) ومعامل تفرطحه $\beta_{٢} = ٣$ وهذه من أهم خصائص التوزيع الطبيعي حيث يجري حساب معاملي الإلتواء والتفرطح لأي توزيع ومقارنتها بنظيريها في التوزيع الطبيعي.

هذا ويمكن حساب العزوم حول الوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي مباشرة باستخدام المعادلة (٥ - ٢ - ٣) كما يلي:

$$\mu_{و} = \frac{١}{\sigma\sqrt{٢\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\text{س} - \mu)^{و}\, \text{هـ}^{-\frac{١}{٢\sigma^{٢}}(\text{س} - \mu)^{٢}}\, \text{دس} \qquad (٤٢ - ٢ - ٦)$$

وبوضع

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \mu}{\sigma}$$

فان σ ص= (س − $\mu$)

و د س = σ د ص

وبالتعويض في (٤٢ ـ ٢ ـ ٥) نجد أن

$$\mu_{و} = \frac{١}{\sqrt{٢\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{و} ص^{و} هـ^{-\frac{١}{٢}ص^{٢}} د ص \qquad (٤٣ - ٢ - ٥)$$

ويلاحظ من (٤٣ ـ ٢ ـ ٥) أن جميع العزوم الفردية حول الوسط الحسابي (من الترتيب و = ٢م + ١ م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . .) تساوي صفراً. أما إذا كانت و زوجية (من الترتيب و = ٢م ، م = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . .) فإن

$$\mu_{٢م} = \frac{٢ \sigma^{٢م}}{\sqrt{٢\pi}} \int_{٠}^{\infty} ص^{٢م} هـ^{-\frac{١}{٢}ص^{٢}} دص \qquad (٤٤ - ٢ - ٥)$$

وبوضع ع = ½ ص$^{٢}$

فان دص = $\frac{دع}{\sqrt{٢ع}}$

وبالتالي فإن المعادلة (٤٤ ـ ٢ ـ ٥) تؤول إلى

$$\mu_{٢م} = \frac{\sigma^{٢م}}{٢^{م}} \cdot \frac{(٢م)!}{م!} \qquad (٤٥ - ٢ - ٥).$$

ومنها يمكن حساب جميع العزوم حول الوسط الحسابي بوضع م = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . .

### (٣ ـ ٢ ـ ٥) الدالة المولدة للعزوم Moment Generating Function

يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي باستخدام المعادلة (٢٣ ـ ٤ ـ ٣) كما يلي:

$$\mu(ت) = \frac{١}{\sigma\sqrt{٢\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{ت س} هـ^{-\frac{١}{٢\sigma^{٢}}(س-\mu)^{٢}} دس$$

(٤٦ ـ ٢ ـ ٥)

$$= \frac{١}{\sigma\sqrt{٢\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{-\frac{١}{٢\sigma^{٢}}\{(س-\mu)^{٢}-٢ت\sigma^{٢}س\}} دس$$

(٤٧ ـ ٢ ـ ٥)

وبإكمال المربع للأس داخل التكامل نجد أن

$$= \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{[س-(\mu+ت\sigma^2)]^2 - 2ت\mu\sigma^2 - ت^2\sigma^4\}} دس$$

(٥ - ٢ - ٤٨)

$$= \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} هـ^{\mu ت+\frac{1}{2}ت^2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}(س-(\mu+ت\sigma^2))^2} دس$$

(٥ - ٢ - ٤٩)

$$\therefore \mu(ت) = هـ^{\mu ت + \frac{1}{2}\sigma^2 ت^2}$$

(٥ - ٢ - ٥٠)

والعزم الواوي حول الصفر هو معامل $\frac{ت^و}{و!}$ في مفكوك الدالة المولدة للعزوم $\mu$ (ت) لجميع قيم و = ٠ ، ١ ، ٢ ، .....

**(٤ - ٢ - ٥) التوزيع الطبيعي القياسي**

**Standard Normal Distribution**

إذا وضعنا ى = $\frac{س-\mu}{\sigma}$ حيث س متغير معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ ودالة كثافة احتماله كما في المعادلة (٣٤ - ٢ - ٥) فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ى تساوي صفراً وتباينه يساوي واحد.

كما أن د ى = د س ، وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (٣٤ - ٢ - ٥) نجد أن

$$ح(ى) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{ى^2}{2}} \qquad -\infty < ى < +\infty$$

(٥ - ٢ - ٥١)

ويشار إلى (٥١ - ٢ - ٥) بدالة كثافة الإحتمال للتوزيع المعتاد القياسي.

ودالة الإحتمال التجميعي للتوزيع المعتاد القياسي تعرف كما يلي:

$$ح(ى) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{ى} هـ^{-\frac{1}{2}ع^2} دع$$

(٥ - ٢ - ٥٢)

ولقد أعدت جداول تعطي قيم ى المختلفة والإحتمالات المناظرة طبقاً للعلاقة التالية:

$$ح(ى \leqslant ى^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{ى^*} هـ^{-\frac{1}{2}ع^2} دع$$

(٥ - ٢ - ٥٣)

ويمكن باستخدام هذه الجداول في حساب قيمة الإحتمال المقابل لقيمة معينة من قيم ى. وباستخدام خاصية التماثل فإنه من الممكن حساب نوعين من الجداول:

١ - جداول تجميعية من $-\infty$ الى $+\infty$

٢ - جداول تجميعية من صفر الى $+\infty$

ويمكن استخدام هذين النوعين من الجداول بنفس القدر من الكفاءة، حيث

$$\int_{-\infty}^{\text{ى}} \text{ح (ع) دع} = \int_{-\infty}^{\text{صفر}} \text{ح (ع) دع} + \int_{\text{صفر}}^{\text{ى}} \text{ح (ع) دع} \qquad (\text{٥ - ٢ - ٥٤})$$

وبالنسبة للقيم السالبة لـ ى فإن

$$\int_{-\infty}^{\text{ى}} \text{ح (ع) دع} = \int_{\text{ى}}^{\infty} \text{ح (ع) دع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \int_{\text{صفر}}^{\text{ى}} \text{ح (ع) دع} \qquad (\text{٥ - ٢ - ٥٥})$$

ولهذا فإن كثيراً من الجداول تكتفي بحساب الإحتمالات المختلفة المناظرة لقيم ى الموجبة ومنها يتم استنتاج الإحتمالات المناظرة للقيم السالبة (أي النوع الثاني من الجداول).

**مثـال ١ :**

إذا كان المتغير العشوائي ى له توزيع طبيعي قياسي وكان المطلوب حساب:

١ - احتمال أن يكون المتغير ى أقل من ٢ ، أي $\text{ح (ى} < \text{٢)}$

٢ - احتمال أن يقع المتغير ى بين -٢،١ أي $\text{ح (-٢} < \text{ى} < \text{١)}$.

فإنه يمكن حساب هذه الإحتمالات بالرجوع إلى جدول رقم (٣) على النحو التالي:

١ - $\text{ح (ى} < \text{٢)} = \text{ح (}-\infty < \text{ى} < \text{صفر) + ح (صفر} < \text{ى} < \text{٢)}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{ح (صفر} < \text{ى} < \text{٢)}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{٠,٤٧٧٢٥}$

$= \text{٠,٩٧٧٢٥}$

٢- $\text{ح(-٢} < \text{ى} < \text{١)} = \text{ح(-٢} < \text{ى} < \text{صفر) + ح(صفر} < \text{ى} < \text{١)}$

$= \text{ح(صفر} < \text{ى} < \text{٢) + ح(صفر} < \text{ى} < \text{١)}$

$= \text{٠,٤٧٧٢ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨١٨٥}$

**مثـال ٢ :**

إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي بمتـوسط $\mu$ = ٢ وتباين $\sigma^2$ = ١٦

أوجد :

١ ـ احتمال أن يكون المتغير س أقل من ٥، أي ح(س<٥)

٢ ـ احتمال أن يكون المتغير س بين -٣ ، ٦ ، أي ح(-٣<س<٦)

**الحـل :**

إذا كـان المتغـير س يتبـع التـوزيـع الـطبيعي بمتـوسط $\mu$ = ٢ وتبـاين $\sigma^2$ = ١٦ فإن المتغير العشوائي ى = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ يتبع التوزيع الـطبيعي القياسي بمتوسط $\mu$ = صفر وتباين $\sigma^2$ = ١ ، وعليه فإن :

١ ـ ح (س<٥) = ح $\left(ى < \frac{٥ - ٢}{٤}\right)$ = ح (ى<٠,٧٥)

ومن الجدول رقم (٣) نجد أن ح (س<٥) = ٠,٧٧٣٤

٢ ـ ح (-٣<س<٦) = ح $\left(\frac{-٣-٢}{٤} < ى < \frac{٦-٢}{٤}\right)$

= ح (- ١,٢٥ < ى<١)

= ح (ى < ١) - ح (ى < - ١,٢٥)

= ٠,٨٤١٣ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٧٣٥٧

**(٥ ـ ٢ ـ ٥) نظريـة :**

إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ن$ تتبـع التوزيـع الـطبيعي ، توقعـاتها $\mu_١$ ، $\mu_٢$ ، . . . ، $\mu_ن$ وتبـايناتهـا $\sigma_١^٢$ ، $\sigma_٢^٢$ ، . . . ، $\sigma_ن^٢$ على التوالي فإن المتغير العشوائي.

س = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $س_ر$ له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $\mu_ر$ ، وتباين $\sigma^2$ = $\sum_{ر=١}^{ن}$ $\sigma_ر^٢$

**البرهـــان :**

حيث أن كلًا من المتغيرات العشـوائية $س_ر$ (ر = ١ ، ٢ ، . . . ، ن) لـه توزيـع طبيعي توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ فإن الدالـة المولـدة للعزوم لهـذا المتغير هي كـما في المعادلـة ( ٥٠ ـ ٢ ـ ٥). وبما أن هذه المتغيرات مستقلة فإن الدالة المولدة للعزوم لحاصل جمعها هي :

$$\mu(ت) = \prod_{ر=1}^{ن} هـ^{ت\mu_ر + \frac{1}{2}\sigma_ر^2 ت^2} \qquad (٥-٢-٥٨)$$

$$= هـ^{\sum_{ر=1}^{ن} (ت\mu_ر + \frac{1}{2}\sigma_ر^2 ت^2)} \qquad (٥-٢-٥٧)$$

وهذه هي الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي معتاد توقعه $\sum_{ر=1}^{ن} \mu_ر$

وتباينه $\sum_{ر=1}^{ن} \sigma_ر^2$

## (٦ - ٢ - ٥) التوزيع الطبيعي ذي المتغيرين
## The Bivariate Normal Distribution

**تعريف:**

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال المشترك لمتغيرين $س_1$ ، $س_2$ هي:

$$ح(س_1، س_2) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$هـ^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{(\frac{س_1-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho(\frac{س_1-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{س_2-\mu_2}{\sigma_2}) + (\frac{س_2-\mu_2}{\sigma_2})^2\right\}}$$

(٥ - ٢ - ٥٨)

$$-\infty < س_1 < \infty ، -\infty < س_2 < \infty$$

$$-\infty < \mu_1 < \infty ، -\infty < \mu_2 < \infty$$

$$\sigma_1^2 > صفر ، \sigma_2^2 > صفر ، -1 < \rho < 1$$

حيث

$\mu_1$ القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $س_1$

$\mu_2$ القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي $س_2$

$\sigma_1^2$ تباين المتغير العشوائي $س_1$

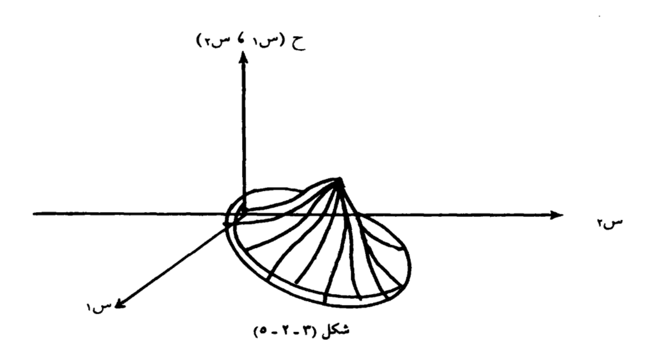
$\sigma_2^2$ تباين المتغير العشوائي $س_2$

$\rho$ معامل الارتباط بين المتغيرين $س_1$، $س_2$

فإننا نقول بأن المتغيرين العشوائيين $س_1$، $س_2$ لهما توزيع طبيعي ثنائي. وتحقق هذه الدالة شرطي دالة كثافة الإحتمال: $ح(س_1 ، س_2) \geq$ صفر

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ح(س_1 ، س_2)\, دس_1\, دس_2 = 1 \qquad (٥-٢-٥٩)$$

ويعتبر التوزيع الطبيعي ذي المتغيرين من أهم التوزيعات الثنائية وشكل دالة كثافة احتماله كالجرس المقلوب كما هو مبين في الشكل (٣ - ٢ - ٥)




شكل (٣ - ٢ - ٥)

ويمكن حساب دالة التوزيع الهامشي Marginal Distribution لكل من المتغيرين س١ ، س٢ كما يلي:

$$ح_1(س_1) = \int_{-\infty}^{\infty} ح(س_1، س_2)\, د س_2 \qquad (٦٠ - ٢ - ٥)$$

$$ح_2(س_2) = \int_{-\infty}^{\infty} ح(س_1، س_2)\, د س_1 \qquad (٦١ - ٢ - ٥)$$

وبالتعويض من المعادلة (٥٨ - ٢ - ٥) في (٦٠ - ٢ - ٥)، (٦١ - ٢ - ٥) نجد أن

$$ح_1(س_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{1}{2}\left(\frac{س_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \qquad (٦٢ - ٢ - ٥)$$

$$ح_2(س_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{1}{2}\left(\frac{س_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2} \qquad (٦٣ - ٢ - ٥)$$

وهذا يعني أن دالة كثافة الإحتمال الهامشي لكل من س١،س٢ هي دالة كثافة الإحتمال للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_1، \mu_2$ وتباين $\sigma_1^2$ ، $\sigma_2^2$ لكل منهما على التوالي:

كما أنه يمكن حساب دالة الإحتمال الشرطي Conditional Distribution

للتوزيع الطبيعي الثنائي كما يلي:

$$\text{ح}\,(\text{س}_1/\text{س}_2) = \frac{\text{ح}\,(\text{س}_1 \,،\, \text{س}_2)}{\text{ح}_2\,(\text{س}_2)} \qquad (٥ - ٢ - ٦٤)$$

$$\text{ح}\,(\text{س}_2/\text{س}_1) = \frac{\text{ح}\,(\text{س}_1 \,،\, \text{س}_2)}{\text{ح}_1\,(\text{س}_1)} \qquad (٥ - ٢ - ٦٥)$$

وبالتعويض من (٥٨ - ٢ - ٥) ، (٦٢ - ٢ - ٥) ، (٦٣ - ٢ - ٥) في المعادلتين (٦٤ - ٢ - ٥) ، (٦٥ - ٢ - ٥) نجد أن

$$\text{ح}\,(\text{س}_1/\text{س}_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left\{\text{س}_1-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\text{س}_2-\mu_2)\right\}^2} \qquad (٥ - ٢ - ٦٦)$$

$$\text{ح}\,(\text{س}_2/\text{س}_1) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left\{\text{س}_2-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\text{س}_1-\mu_1)\right\}^2} \qquad (٥\ ٢ - ٦٧)$$

وهذا يعني أن ح (س١/س٢) هي دالة كثافة احتمال لتوزيع طبيعي متوسطه $\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\text{س}_2-\mu_2)$ وتباينه $\sigma_1^2\,(1-\rho^2)$ ، ح (س٢/س١) هي دالة كثافة احتمال توزيع طبيعي متوسطه $\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\text{س}_1-\mu_1)$ وتباينه $\sigma_2^2\,(1-\rho^2)$

# الفصل الثالث

## توزيعات العينات الصغـيرة
## Small Samples Distributions

تحدثنا في الفصل السابق عن التوزيع الطبيعي (توزيع العينات الكبيرة) ونتحدث في هذا الفصل عن توزيعات العينات الصغيرة والتي تلعب دوراً رئيسياً في نظرية العينات Sampling Theory

### (١ - ٣ - ٥) توزيع كاي تربيع $X^2$ - Distribution

أشرنا في الفصل الثاني من هذا الباب إلى أنه إذا كان المتغير العشوائي $س_ر$ له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$ فإن المتغير العشوائي

$ى = \frac{س_ر - \mu}{\sigma}$ له توزيع طبيعي قياسي متوسطه صفر وتباينه ١ .

وإذا كان ى متغيراً معتاداً قياسياً فإن المتغير

$\chi^2 = ى^2$ له دالة كثافة احتمال على الشكل التالي

$$ح(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (٥ - ٣ - ٦٨)$$

أما إذا كان $ى_1$،$ى_2$ متغيرين معتادين قياسيين مستقلين فإن المتغير

$\chi^2 = ى_1^2 + ى_2^2$ له دالة كثافة احتمـال

$$ح(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)} هـ^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{2}{2}-1} \qquad (٥ - ٣ - ٦٩)$$

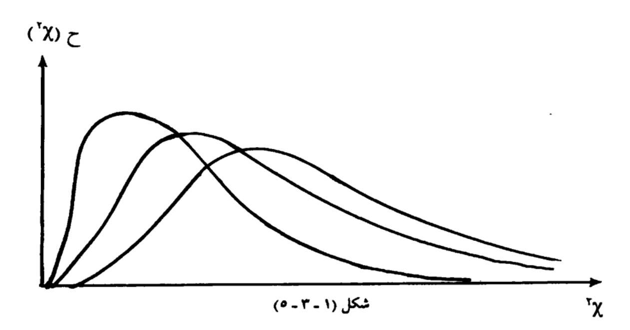
وبشكل عام إذا كانت $ى_1$ ، $ى_2$ ، . . . ، $ى_ن$ متغيرات معتادة قياسية مستقلة فإن المتغير.

$$\chi^2 = ى_1^2 + ى_2^2 + \ldots + ى_ن^2$$

له دالة كثافة الإحتمـــال

$$ح(\chi^{٢}) = \frac{١}{٢^{\frac{ن}{٢}}\,\Gamma\left(\frac{ن}{٢}\right)}\; هـ^{-\frac{١}{٢}\chi^{٢}} (\chi^{٢})^{\frac{ن}{٢}-١} \qquad (٥ - ٣ - ٧٠)$$

وتعتمد على معلمة واحدة هي درجات الحريـة ن. والشكل (١ - ٣ - ٥) يبـين هـذه الدالـة لدرجـات حريـة مختلفة، حيث تبتعـد قمـة المنحنى عن الصفـر ويقـترب التوزيع من التماثل كلما زادت درجات الحرية.




شكل (١ - ٣ - ٥)

**العزوم والدالة المولدة للعزوم لتوزيع كأي تربيع**

يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم لتوزيع كاي تربيع كما يلي:

$$\mu(ت) = \frac{١}{٢^{\frac{ن}{٢}}\,\Gamma\left(\frac{ن}{٢}\right)} \cdot \int_{٠}^{\infty} هـ^{ت\chi^{٢}}\, هـ^{-\frac{١}{٢}\chi^{٢}} (\chi^{٢})^{\frac{ن}{٢}-١}\, د\chi^{٢} \qquad (٥ - ٣ - ٧١)$$

$$= (١ + ٢ت)^{-\frac{ن}{٢}} \qquad (٥ - ٣ - ٧٢)$$

ونجـد العزوم لتـوزيع كـأي تربيـع من هذه الـدالة بحسـاب الدالـة التراكميـة Cumulative function (الدالة الـتراكمية عبـارة عن لوغـاريتم الدالـة المولـدة للعزوم للأساس الطبيعي هـ) وذلك على النحو التالي:

$$لن\ \mu(ت) = \frac{ن}{٢}\ لن\ (١ - ٢ت) \qquad (٥ - ٣ - ٧٣)$$

وبحساب مفكوك الطرف الأيسر من (٧٣ ـ ٣ ـ ٥) فإن:

$$\text{لن } \mu (ت) = \frac{ت}{١!} ن + \frac{ت^{٢}}{٢!} (٢ن) + \frac{ت^{٣}}{٣!} (٨ن) + \frac{ت^{٤}}{٤!} (٤٨ن) + \ldots$$

$$= \frac{ت}{١!} \; ٢^{١} \; (١-١)^{١} !ن + \frac{ت^{٢}}{٢!} \; ٢^{٢} \; (٢-١)^{١} !ن$$

$$+ \frac{ت^{٣}}{٣!} \; ٢^{٣} \; (٣-١)^{١} !ن$$

$$+ \frac{ت^{٤}}{٤!} \; ٢^{٤} \; (٤-١)^{١} ! ن + \ldots$$

ومنها نجد أن

$$k_و = ٢^{و} \; (و-١)^{١} !ن$$

حيث

$k_و$ هي معاملات $\left(\frac{ت^{و}}{و!}\right)$ في المفكوك السابق، و = ١، ٢ ......

وتسمى المراكمات Cumulants

أي أن

$$k_١ = \mu'_١ = ن$$

$$k_٢ = \mu'_٢ - \mu'^{٢}_١ = \mu_٢ = ٢ن$$

$$k_٣ = \mu'_٣ - ٣ \mu'_٢ \mu'_١ + ٢\mu'^{٣}_١ = \mu_٣ = ٨ن$$

$$k_٤ = \mu_٤ - ٣\mu^{٢}_٢ = ٤٨ن$$

$$\therefore \mu_٤ = ٤٨ن + ٣\mu^{٢}_٢ = ٤٨ن + ١٢ن^{٢}$$

$$\beta^{٢}_١ = \frac{\mu^{٢}_٣}{\mu^{٣}_٢} = \frac{٨}{ن}$$

$$\beta_٢ = \frac{\mu_٤}{\mu^{٢}_٢} = \frac{٤٨ن + ١٢ن^{٢}}{٤ن^{٢}} = ٣ + \frac{١٢}{ن}$$

**دالة الإحتمال التجميعي وجداول كأي تربيع**

يمكن حساب دالة الإحتمال التجميعي لتوزيع كأي تربيع كما يلي

$$ع(\chi^{٢}) = \int_{٠}^{\chi^{٢}} ح(ع) \, دع \qquad (٧٤ - ٣ - ٥)$$

ولقد تم حساب المساحة تحت منحنى توزيع كاي تربيع ولدرجات حرية محدّدة (ن) ورتبت النتائج في جداول إحصائية (جدول رقم (٤)) بحيث يمكن تحديد المساحة تحت المنحنى إذا علمت قيمة $\chi^2$، كما يمكن أيضاً تحديد قيمة $\chi^2$ إذا علمت المساحة تحت المنحنى وذلك لعدد معين من درجات الحرية ن، وفي كلتا الحالتين يجب أن نحدد أيضاً مستوى المعنوية $\alpha$ والذي سنعرّفه في باب اختبارات الفروض.

**نظرية هامة:**

إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان $س_١$، $س_٢$ يتبعان توزيع كأي تربيع بدرجات حرية $ن_١$، $ن_٢$ على التوالي فإن المتغير العشوائي $س = س_١ + س_٢$ له أيضاً توزيع كأي تربيع بدرجات $ن = ن_١ + ن_٢$، وتسمى هذه الخاصية القابلية للتجميع Additive Property

**البرهان**

نبرهن على صحة هذه النظرية باستخدام الدالة المولدة للعزوم لتوزيع كاي تربيع والمبينة في (٧٢ ـ ٣ ـ ٥)

$\mu_١(ت)$ للمتغير الأول $س_١ = (١ - ٢ت)^{-\frac{ن_١}{٢}}$

$\mu_٢(ت)$ للمتغير الثاني $س_٢ = (١ - ٢ت)^{-\frac{ن_٢}{٢}}$

وبما أن $س_١$،$س_٢$ متغيران مستقلان فإن الدالة المولدة للعزوم لحاصل جمعهما $\mu_{١+٢}(ت)$ هي

$$\mu_{١+٢}(ت) = \mu_١(ت) \times \mu_٢(ت)$$

$$= (١ - ٢ت)^{-\left(\frac{ن_١ + ن_٢}{٢}\right)} \qquad (٧٥ ـ ٣ ـ ٥)$$

وهذا يمكن تعميم هذه النظرية لأي عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة.

**تطبيقات توزيع كأي تربيع**

يستخدم توزيع كأي تربيع في التطبيق على نطاق واسع وسوف نتطرق لبعض هذه التطبيقات في البابين السادس والسابع من هذا الكتاب.

### (٢ ـ ٣ ـ ٥) توزيع ت t-Distribution

إذا كانت المتغيرات العشوائية المستقلة $س_١$،$س_٢$، . . . .، $س_ن$ تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$ وأوجدنا القيمة العيارية ى لكل منها فإن

$$ت = \frac{ى}{\sqrt{\frac{\chi^2_{ن-1}}{ن-1}}} = \frac{ى}{\sqrt{\frac{1}{ن-1} \sum_{ر=1}^{ن-1} ى_ر^2}} \quad ، \quad -\infty < ت < +\infty$$

(٧٦ - ٣ - ٥)

هو متغير له توزيع ت بدرجات حرية ن - ١ ودالة كثافة احتماله هي

$$ح(ت) = \frac{1}{\sqrt{ن-1}\,\beta\left(\frac{1}{2}، \frac{ن-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{ت^2}{ن-1}\right)^{-\frac{ن}{2}} ، \quad -\infty < ت < +\infty$$

(٧٧ - ٣ - ٥)

وقد اكتشف العالم W.S.Gosset هذا التوزيع سنة ١٩٠٨ وأطلق عليه اسم ستيودنت Student

وإذا وضعنا ن - ١ = $\nu$ (تقرأ نيو) للدلالة على عدد درجات الحرية فإنه يمكن كتابة المعادلة (٧٧ - ٣ - ٥) كما يلي:

$$ح(ت ؛ \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}\,\beta\left(\frac{1}{2}، \frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{ت^2}{\nu}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \quad -\infty < ت < +\infty$$

(٧٨ - ٣ - ٥).

ومنحنى هذه الدالة متماثل حول الصفر ويمتد طرفاه إلى $\pm \infty$ ويقتربان من المحور الأفقي دون أن يلتقيا به، ويختلف عن التوزيع الطبيعي القياسي بأن تباينه أكبر من واحد (طرفاه مرتفعان عن المحور الأفقي أكثر من طرفي التوزيع المعتاد القياسي).

## عـزوم توزيـع ت

بما أن توزيع ت هو توزيع متماثل حول الصفر فإن جميع عزومه الفردية حول الصفر تساوي صفراً، أي أن

$$\mu'_و = صفر \qquad (٧٩ - ٣ - ٥)$$

حيث و = ٢م + ١ ، م = ٠ ، ١ ، ٢ ، ...

وبالتالي فإن العزوم الزوجية حول الصفر تساوي العزوم الزوجية حول الوسط الحسابي. أي أن

$$\mu'_و = \mu_و = \int_{-\infty}^{\infty} ت^و\, ح(ت)\, دت \qquad (٨٠ - ٣ - ٥)$$

حيث و = ٢م

م = ٠، ١، ٢، ....

وبالتعويض من (٧٧ - ٣ - ٥) في (٨٠ - ٣ - ٥) نجد أن

$$\mu_{٢م} = \frac{(٢م - ١)\,(٢م - ٣)\ \ldots\ldots\ ١}{(\nu - ٢)\,(\nu - ٤)\ \ldots\ldots\ (\nu - ٢م)} \cdot \nu^{م} \qquad (٨١ - ٣ - ٥)$$

وحيث أن الوسط الحسابي لتوزيع ت يساوي صفراً فإن عزومه حول الصفر تساوي عزومه حول الوسط الحسابي. وإذا وضعنا م = ١ في المعادلة (٨١ - ٣ - ٥) فإن

$$\mu_{٢} = \frac{\nu}{\nu - ٢}$$

أما إذا وضعنا م = ٢ فإن

$$\mu_{٤} = \frac{٣\,\nu^{٢}}{(\nu - ٢)\,(\nu - ٤)}$$

وبالتعويض في المعادلتين (١٠ - ٢ - ٣)، (١١ - ٢ - ٣) فإن

$$\beta_{١} = \text{صفر}$$

$$\beta_{٢} = ٣\left(١ + \frac{٢}{\nu - ٤}\right) \qquad (١٢ \,.\, ٣ - ٥)$$

ويتضح من المعادلة (٨٢ - ٣ - ٥) إن توزيع ت يؤول إلى التوزيع المعتاد القياسي عندما $\nu \to \infty$ ($\nu \geq ١٢٠$).

**دالة الاحتمال التجميعي وجداول ت**

يمكن حساب دالة الإحتمال التجميعي لتوزيع ت كما يلي:

$$ع\,(ت) = \int_{-\infty}^{ت} ح\,(ع)\ دع \qquad (٨٣ - ٢ - ٥)$$

هذا ويمكن استخدام دالة الإحتمال التجميعي لحساب احتمال أن تقع قيمة ت بين أي قيمتين $ت_{\frac{\alpha}{٢}}$، $ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}$، حيث

$$ح\,(ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}) = \int_{ت_{\frac{\alpha}{٢}}}^{ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}} ح\,(ت)\ دت \qquad (٨٤ - ٣ - ٥)$$

ومن تماثل توزيع ت نجد أن

$$ح\left(ت_{\frac{\alpha}{2}} < ت < ت_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 2 \int_{.}^{ت_{1-\frac{\alpha}{2}}} ح(ت)\, دت = 1 - \alpha$$

(٥ ـ ٣ ـ ٨٥)

ولقد حسبت قيم $ت_{1-\frac{\alpha}{2}}$ لاحتمالات مختلفة $(1 - \alpha)$ ولدرجات حرية مختلفة ٧ ورتبت في جدول يسمى جدول توزيع ت (أنظر جدول رقم (٥))

**(٣ ـ ٣ ـ ٥) توزيع ف** F-Distribution

إذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان $س_1$ ، $س_2$ معتادين الأول توقعه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ والثاني توقعه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ ، وأخذنا من هذين المجتمعين عينتين عشوائيتين مستقلتين الأولى حجمها $ن_1$ ومشاهداتها $س_{11}$، $س_{21}$، . . . . $س_{ن_1}$ ووسطها الحسابي $\overline{س}_1$ ، والثانية حجمها $ن_2$ ومشاهداتها $س_{12}$، $س_{22}$، . . . . . $س_{ن_2}$ ووسطها الحسابي $\overline{س}_2$ فإن المقدار

$$ف = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{1ر} - \overline{س_1})^2}{\sigma_1^2 (ن_1 - 1)} \div \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_{2ر} - \overline{س_2})^2}{\sigma_2^2 (ن_2 - 1)} \quad (٥ ـ ٣ ـ ٨٦)$$

يتبع توزيعاً يسمى توزيع ف أو توزيع فيشر بدالة كثافة احتمال على النحو التالي:

$$ح(ف؛ ٧_1، ٧_2) = \frac{1}{\beta\left(\frac{٧_1}{2}، \frac{٧_2}{2}\right)} \times \frac{\left(\frac{٧_1}{٧_2} ف\right)^{\frac{٧_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{٧_1}{٧_2} ف\right)^{\frac{٧_1 + ٧_2}{2}}} \times \frac{٧_1}{٧_2}$$

(٥ ـ ٣ ـ ٨٧)

حيث $ن_1 - 1 = ٧_1$ درجات حرية البسط، $ن_2 - 1 = ٧_2$ درجات حرية المقام.

نحن نعلم من توزيع كأي تربيع أن

$$\chi^2_{ن_1 - 1} = \frac{\sum (س_{1ر} - \overline{س_1})^2}{\sigma_1^2}$$

$$\chi^2_{ن_2 - 1} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن_2} (س_ر - \overline{س_2})^2}{\sigma_2^2}$$

وإذا وضعنا $ن_1 - 1 = \nu_1$ ، $ن_2 - 1 = \nu_2$ فإن المعـادلة (٨٦ ـ ٣ ـ ٥) تؤول إلى

$$ف = \frac{\chi^2_{\nu_1}}{\nu_1} \div \frac{\chi^2_{\nu_2}}{\nu_2}$$

بنفس دالة كثافة الاحتمال المعطاة في المعادلـة (٨٧ ـ ٣ ـ٥) بدرجـات حريـة $\nu_1$ للبسط، $\nu_2$ للمقام. أي أن المتغير العشوائي ف هو النسبة بين متغـيرين مستقلين كل منهما له توزيع كأي تربيع. ومن المعادلـة (٨٧ ـ ٣ ـ ٥) يتبيّن أن دالـة كثافـة الاحتمال لهذا التوزيع تعتمد على المعلمتين $\nu_1$ ، $\nu_2$ والتي تكون عادة أعـداداً صحيحة مـوجبة. ولقد كان العالم سيندكور Sendecor أول من توصل إلى هذا التـوزيع واسـماه توزيـع (ف) وذلك تكريماً للعالم فيشر Fisher.

**عزوم توزيع (ف):**

إذا عوّضنا من المعادلة (٨٧ ـ ٣ ـ ٥) في المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٣) فـإنه يمكن إثبـات أن العزم الواوي حول الصفر لتوزيع ف هو كما في المعادلة التالية:

$$\mu'_{\text{و}} = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^{\text{و}} \times \frac{\beta(\tfrac{1}{2}\nu_1 + \text{و} ،\ \tfrac{1}{2}\nu_2 - \text{و})}{\beta(\tfrac{1}{2}\nu_1 + \tfrac{1}{2}\nu_2)} \qquad (٨٨ - ٣ - ٥)$$

ومنها نجد أن:

$$\mu'_1 = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \qquad (٨٩ - ٣ - ٥)$$

$$\mu'_2 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^2 \times \frac{\nu_1(\nu_1 + 2)}{(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)} \qquad (٩٠ - ٣ - ٥)$$

$$\mu'_3 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^3 \times \frac{\nu_1(\nu_1 + 2) + (\nu_1 + 4)}{(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 6)} \qquad (٩١ - ٣ - ٥)$$

$$\mu'_4 = \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^4 \times \frac{\nu_1(\nu_1 + 2)(\nu_1 + 4) + (\nu_1 + 6)}{(\nu_2 - 2)(\nu_2 - 4)(\nu_2 - 6)(\nu_2 - 8)} \qquad (٩٢ - ٣ - ٥)$$

وبـالـتـعـويض مـن (٨٩ ـ ٣ ـ ٥) ، (٩٠ ـ ٣ ـ ٥) ، (٩١ ـ ٣ ـ ٥) ، (٩٢ ـ ٣ ـ ٥) في (٧ ـ ٢ ـ ٣) ، (٨ ـ ٢ ـ ٣) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} \mu_2 &= ٢\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-٢}\right)^{٢} \times \frac{(\nu_1+\nu_2-٢)}{\nu_1\,(\nu_2-٤)} \\ \mu_3 &= ٨\left(\frac{\nu_2}{\nu_2-٢}\right)^{٣} \times \frac{(٢\nu_1+\nu_2-٢)\,(\nu_1+\nu_2-٢)}{\nu_1^{٢}\,(\nu_2-٤)\,(\nu_2-٦)} \end{aligned}\right\} \qquad (٩٣ ـ ٣ ـ ٥)$$

وإذا عوضنا من (٩٣ ـ ٣ ـ ٥) في (١٠ ـ ٢ ـ ٣) نجد أن:

$$\beta_1 = \frac{٨\,(٢\nu_1+\nu_2-٢)^{٢}\,(\nu_2-٤)}{\nu_1\,(\nu_2-٦)^{٢}\,(\nu_1+\nu_2-٢)}$$

**دالة الاحتمال التجميعي وجداول ف:**

يمكن حساب دالة الاحتمال التجميعي لتوزيع $\text{ف}_{\nu_1,\nu_2}$ كما يلي:

$$\text{ع}\,(\text{ف}_{\nu_1},\ \nu_2) = \int_{.}^{\text{ف}_{\nu_1,\nu_2}} \text{ح}\,(\text{ع})\ \text{د}\,\text{ع} \qquad (٩٤ ـ ٣ ـ ٥)$$

ولقد تم حساب المساحة تحت منحنى توزيع $\text{ف}_{\nu_1,\nu_2}$ ووضعها في جداول إحصائية بحيث يمكن تحديد المساحة تحت المنحني إذا علمت قيمة $\text{ف}_{\nu_1}$، $\nu_2$ كما يمكن أيضاً تحديد قيمة $\text{ف}_{\nu_1}$، $\nu_2$ إذا علمت المساحة تحت المنحني وذلك لعدد معين من درجات الحرية $\nu_1$، $\nu_2$ (أنظر جدول (٦)). وهنالك تطبيقات واسعة لتوزيع ف في نظرية الإحصاء ندرس بعضها في البابين السادس والسابع من هذا الكتاب.

## أسئلة وتمارين (٥)

(٥ - ١) إذا كان متوسط الانتاج اليومي من الحليب لنوع معين من الأبقار يساوي ١٨ كغم. باستخدام نظرية بينية، أوجد احتمال أن يزيد الانتاج اليومي لأي بقرة من هذا النوع عن ك $\mu$، حيث ك = ١، ٢، ٣، ٤، ١٠، ٥٠

(٥ - ٢) لدراسة متوسط مدة خدمة البطاريات الجافة من الحجم المتوسط والذي تنتجه إحدى الشركات المحلية سحبنا عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة حجمها ١٠٠ بطارية. فإذا علمنا بأن مدة خدمة البطارية الواحدة من إنتاج هذه الشركة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٦٠ ساعة وتباين ٢٥ (ساعة)[٢].

استخدم نظرية تشيبتشيف لإيجاد احتمال أن يزيد الفرق المطلق بين متوسط العينة العشوائية ومتوسط المجتمع عن ك $\sigma$ لقيم

ك = ١، ٢، ٣، ٤، ١٠، ١٠٠

ن = ١٠٠، ٢٠٠، ٥٠٠

ثم تحقق من أن الفرق المطلق بينهما ينتهي إلى الصفر عندما تصبح ن كبيرة.

(٥ - ٣) لدراسة نسبة الأمية بين النساء في إحدى المدن سحبنا عينة عشوائية حجمها ١٢٠ امرأة، فإذا علمنا من دراسة سابقة بأن نسبة الأمية بين النساء في هذه المدينية تساوي ٠,٦٥، استخدم نظرية تشيبتشيف لإيجاد احتمال أن يزيد الفرق المطلق بين نسبة الأمية في العينة ونسبتها في المجتمع عن ك $\sigma$ لقيم ك = ١، ٢، ٣، ٤، ٢٠، ٦٠

(٥ - ٤) إذا كان وزن الطفل الذكر (س) عند الولادة في إحدى المدن يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٢٩٠٠ غرام وتباين ١٠٠٠٠ (غرام)[٢]،

استخدم جدول التوزيع الطبيعي لإيجاد الاحتمالات التالية:

١ - ح (س ≤ ٣٠٠٠)

٢ - ح (س ≥ ٢٧٠٠)

٣ - ح (٢٩٥٠ ≥ س ≥ ٣١٠٠)

(٥ - ٥) إذا كان توزيع الدخول (س) في مدينة ما طبيعياً بتوقع يساوي ٢٠٠ دينار وتباين يساوي ٢٥ (دينار)٢، أوجـد:

١ - ح (س ≥ ١٩٥)

٢ - ح (١٩٥ ≥ س ≥ ٢٠٥)

٣ - ح (س ≤ ٢٠٠)

وإذا اخترنا عينة عشوائياً من هذه المدينة عدد مفرداتها ٥٠٠، أوجـد عدد المفردات التي يقع دخلها بين ١٩٨، ٢٠٢ دينار.

(٥ - ٦) إذا كان وزن ثمرة البرتقال في إحدى المزارع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٢٠٠ غم وانحراف معياري ١٠ غم. ما هو احتمال أن يقل وزن البرتقالة عن ١٨٥ غم؟ وما هو احتمال أن يزيد عن ٢٢٥ غم. وإذا كانت شروط التصدير تقتضي أن لا يقل وزن البرتقالة عن ١٨٥ غم وكان إنتاج المزرعة ١٠٠٠٠ طن، فكم طناً منها تنطبق عليه شروط التصدير؟

(٥ - ٧) لدراسة وزن البيضة الذي تنتجه إحدى المزارع سحبنا عينة عشوائية حجمها ١٦٠ بيضة، فإذا علمت من دراسة سابقة أن وزن البيضة الذي تنتجه هذه المزرعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ٩٢ غم وتباين ٣٦ (غرام)٢، احسب الاحتمالات التالية:

١ - ح ($\bar{\text{س}}$ ≤ ٩٤,٥ غم)

٢ - ح ($\bar{\text{س}}$ ≥ ٩٠ غم)

٣ - ح (٩١ غم ≥ $\bar{\text{س}}$ ≤ ٩٣ غم)

حيث $\bar{\text{س}}$ متوسط وزن البيضة للعينة العشوائيه

(٥ - ٨) إذا كان أجر العامل الأسبوعي (س) في مصنع معين، يتبع توزيعاً طبيعياً توقعه ٣٠ دينار وانحرافه المعياري ٥ دنانير، أوجد :

١ ـ نسبة العمال الذين تتراوح أجورهم الأسبوعية بين ٢٠، ٣٥ دينار.
٢ ـ المئين العاشر والربيع الأدنى للأجور.
٣ ـ الأجرين الذين يقع بينهما ٩٥٪ من أجور العمال في هذا المصنع.

(٥ ـ ٩) إذا كان المتغير العشوائي س يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ٦٠ وانحراف معياري ٨ والمتغير العشوائي ص يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ٦٠ وانحراف معياري ٦ وكان المتغيران مستقلين وعرفنا متغيراً ثالث ع كما يلي:

ع = س + ص

١ ـ أوجد القيمة المتوقعة والتباين للمتغير ع
٢ ـ أوجد ح (ع < ١٠٠)

(٥ ـ ١٠) إذا علمت أن أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها أحد المصانع موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٥٠٠ ساعة وانحراف معياري ٢٠ ساعة، أوجد:
١ ـ نسبة المصابيح التي يتراوح عمرها بين ٥٠٠، ٥٥٠ ساعة
٢ ـ نسبة المصابيح التي يزيد عمرها عن ٦٠٠ ساعة
٣ ـ نسبة المصابيح التي يقل عمرها عن ٤٠٠ ساعة
٤ ـ العمر الذي يعمّر أقل منه ٩٥٪ من المصابيح.

(٥ ـ ١١) إذا كان المتغير العشوائي ى له توزيع طبيعي قياسي، أوجد الاحتمالات التالية:
١ ـ ح (ى ≤ - ١,٩٦)
٢ ـ ح (ى ≥ ٢,٥٧٦)
٣ ـ ح (ى ≥ ١,٦٤٥)
٤ ـ ح (- ١,٦٤٥ ≥ ى ≥ ٢,٥٧٦)

(٥ ـ ١٢) لدراسة وزن الرغيف الذي ينتجه أحد الأفران، سحبنا عينة عشوائية من إنتاج هذا الفرن حجمها ٢٦ رغيفاً، فإذا كان متوسط وزن الرغيف في العينة $\overline{\text{س}}$ (غير معلوم) وتباين العينة $\text{ع}^2$ = ٢٥، باستخدام جداول توزيع (ت) أوجد الاحتمالات التالية إذا علمت بأن متوسط وزن الرغيف من إنتاج هذا الفرن = ١٨٠ غم:

١ - ح ($\bar{س}$ ≥ ١٨٢)

٢ - ح ($\bar{س}$ ≤ ١٧٧)

٣ - ح (١٧٨ ≤ $\bar{س}$ ≤ ١٨٣)

(٥ - ١٣) باستخدام جدول توزيع كاي تربيع، أوجد قيم ما يلي:

$\chi^2_{(٣٠، ٠,٩٠)}$ ، $\chi^2_{(٦٠، ٠,٩٧٥)}$ ، $\chi^2_{(٤٠، ٠,٠٢٥)}$

$\chi^2_{(٥٠، ٠,٩٩)}$ ، $\chi^2_{(٢٠، ٠,٩٩٥)}$

(٥ - ١٤) باستخدام جدول توزيع ف أوجد قيم ما يلي:

ف(٢٠، ١٠)، ٠,٠٥ ، ف(٦، ٦)، ٠,٠١ ، ف(٧، ١٢)، ٠,٠٥

ف(٢٠، ١٠)، ٠,٠٥ ، ف(٢، ١٥)، ٠,٠١

(٥ - ١٥) إذا كان المتغير العشوائي ى يتبع التوزيع الطبيعي القياسي، باستخدام جداول هذا التوزيع، أوجد قيمة ى* التي تحقق ما يلي:

١ - ح (ى ≥ ى*) = ٠,١٠

٢ - ح (ى ≤ ى*) = ٠,٠٥

٣ - ح (ى ≥ ى*) = ٠,٥٠

٤ - ح (ى ≤ ى*) = ٠,٧٥

٥ - ح (ى ≥ ى*) = ٠,٩٩٥

٦ - ح (ى ≤ ى*) = ٠,٠٢٥

(٥ - ١٦) إذا كان المتغير العشوائي ت يتبع توزيع ستيودنت، باستخدام جداول هذا التوزيع أوجد قيم ت* التي تحقق ما يلي:

١ - ح (ت ≥ ت*٢٠) = ٠,٠٥

٢ - ح (ت ≤ ت*٣٠) = ٠,٥٠

٣ - ح (ت ≥ ت*١٢٠) = ٠,٠٢٥

٤ - ح (ت ≤ ت*٤٠) = ٠,٩٧٥

٥ - ح (ت ≥ ت*١٠) = ٠,٦٠

(٥ - ١٧) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$. بالاستعانة بجداول التوزيع الطبيعي القياسي، أوجد قيمة الثابت أ التي تحقق العلاقات التالية:

١ - ح $(\mu - أ\sigma < س < \mu + أ\sigma)$ = ٠,٦٨٢٦
٢ - ح $(\mu - أ\sigma < س < \mu + أ\sigma)$ = ٠,٩٥٤٤
٣ - ح $(\mu - أ\sigma < س < \mu + أ\sigma)$ = ٠,٩٩٦٥
٤ - ح $(س > \mu - أ\sigma)$ = ٠,٨٤١٣
٥ - ح $(س > \mu - أ\sigma)$ = ٠,٩٧٧٢
٦ - ح $(س > \mu - أ\sigma)$ = ٠,٩٩٨٧

(٥ - ١٨) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي متوسطة $\mu$ وتباينه $\sigma^2$،
أثبت أن ى = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ هو متغير عشوائي له توزيع طبيعي متوسط صفر وتباينه واحد.

(٥ - ١٩) إذا كان المتغير العشوائي س له توزيع طبيعي متوسطه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ ،
أثبت أن $\hat{س} = \frac{مجـ س_ر}{ن}$ هو متغير عشوائي له توزيع طبيعي متوسطه $\mu$ وتباينه $\frac{\sigma^2}{ن}$.

(٥ - ٢٠) إذا كان المتغيرات العشوائيان $\chi^2_1$ ، $\chi^2_2$ لهما توزيع كأي تربيع بدرجات حرية $ن_1$ ، $ن_2$ على التوالي، أثبت أن:
$\chi^2 = \chi^2_1 + \chi^2_2$ هو متغير عشوائي له توزيع كأي تربيع بدرجات حرية $ن_1 + ن_2$ وذلك بالاستعانة بالدالة المولدة للعزوم، ثم أوجد توقع وتباين هذا التوزيع.

# الباب السادس

## التقدير Estimation

نواجه في كثير من الأحيان مشكلة تقدير ثوابت Constants مجتمع معين من بيانات عينة مأخوذة من هذا المجتمع. وقد عالجنا هذا الوضع بشكل وصفي مبسّط أثناء دراستنا لبعض المبادىء الأساسية في علم الإحصاء، حيث اعتبرنا أن العزوم والأوساط ومقاييس التشتت ومعاملي الإلتواء والتفرطح تقديرات جيدة لنظيراتها في مجتمع الدراسة وبشكل خاص إذا كان حجم العينة كبيراً، ولم نتعرّض في حينها لدراسة خواص المقدّر الجيد وإمكانية الحصول عليه إن وجد. وفي هذا الباب فإننا ندرس كيفية الحصول على مثل هذه المقدّرات، ولتحقيق هذا الهدف فإنه لا بدّ من اقتصار الدراسة على العينات العشوائية Random Samples.

ولتوضيح المقصود بالمقدّر Estimator والتقدير Estimate فإننا نبدأ بحالة معلمة واحدة. فإذا كان المجتمع س موزعاً توزيعاً يعتمد على المعلمة $\theta$، أو بتعبير آخر إذا كان المجتمع (المتغير) س له دالة كثافة احتمال ح (س ؛ $\theta$) وأخذنا عينة عشوائية من هذا المجتمع مفرداتها س١ ، س٢ ، . . . . ، سن فإننا نسعى إلى إيجاد رقم أو مدى من الأرقام، باستخدام هذه المشاهدات، بحيث يمكن استخدامه كقيمة للمعلمة $\theta$ أو مدى يضم قيمة هذه المعلمة. ومن المعلوم أن المشاهدات س١ ، س٢ ، . . . . ، سن عبارة عن متغيرات عشوائية وكل دالة في هذه المشاهدات متغير عشوائي وتسمى إحصائي Statistic أو مقياس احصائي Statistical Measure فالوسط الحسابي والوسيط والمنوال والإنحراف المعياري ومعاملي الإلتواء والتفرطح ومعامل الارتباط وغيرها احصاءات أو مقاييس إحصائية. وحيث أن العينة جزء من كل فإننا لا نتوقع أن يعطينا الإحصائي قيمة مساوية لمعلمة المجتمع في كل وقت ولكل عينة، وأقصى ما نهدف إليه هو الحصول على صيغة إحصائي يعطي قيماً جيدة في المتوسط أو على المدى

البعيد وعلى هذا فإننا لا نرفض مقياساً إحصائياً لأنه يعطي قيمة غير جيدة في حالة معينة.

ويجب التمييز بين الصيغة الرياضية للإحصاء والتي تسمى مقدّراً Estimator والقيمة التي نحصل عليها بعد التعويض في هذه الصيغة لقيم المشاهدات وتسمى تقديراً Estimate فصيغة الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$ تسمى مقدّراً، أما إذا اخترنا عينة عشوائية من مجتمع معيّن مفرداتها ٢، ٣، ٥، ١٠، ١٥ وعوّضنا قيم هذه المشاهدات في صيغة الوسط الحسابي فإن $\overline{س} = \frac{٢+٣+٥+١٠+١٥}{٥} = ٧$ تسمى تقديراً.

وكمثال آخر فإن الصيغة التي نعرف بها المنوال بطريقة الفروق تسمى مقدّراً، أما إذا استخدمنا هذه الصيغة لحساب المنوال من جدول تكراري معيّن فإن القيمة التي نحصل عليها تسمى تقديراً. وندرس في هذا الباب التقدير بنقطة والتقدير بفترة ثقة.

# الفصل الأول

## التقدير بنقطة Point Estimation

التقدير بنقطة عبارة عن قيمة واحدة نحصل عليها من بيانات العينة باستخدام مقدّر معين نقدّر به معلمة المجتمع . فمثلاً الوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$ مقدّر بنقطة لأنه يزودنا بقيمة واحدة كتقدير لمتوسط المجتمع ، وتباين العينة $ع^{٢} = \frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢}$ مقـدّر بنقطة يزودنا بقيمة واحدة كتقدير لتباين المجتمع . وسوف ندرس في هذا الفصل بشيء من التركيز خواص المقدّر الجيد وطرق التقدير ، حيث أنه تتعدد في علم الإحصاء المقدّرات للمعلمة الواحدة ، فمتوسط مجتمع معتاد $\mu$ يمكن تقديره من بيانات عينة باستخدام الوسط الحسابي ، أو الوسيط ، أو المنوال ، . . . . الخ وكذلك الاختلاف أو التشتت في مجتمع ما يمكن تقديره بعدد من المقدّرات أيضاً مثل الإنحراف المعياري ، المدى ، . . . . الخ والأسئلة التي تطرح في مثل هذه الحالات : ما هو المقدر الجيد ؟ وما هي المعايير التي تستخدم في المفاضلة بين المقدرات المختلفة ؟ وقد اعتمدنا في مبادىء الإحصاء على أساليب وصفية بسيطة في المفاضلة بين المقدّرات المختلفة ، ولكننا نعتمد في تقييم المقدّر في دراستنا الحالية ، على أساليب رياضية تعتمد أساساً على التوزيعات الإحتمالية وخصائص هذه التوزيعات .

### (١ - ١ - ٦) خواص المقدر الجيد

من أهم خواص المقدر الجيد :

١ - عدم التحيز Unbiasedness

٢ - الاتساق Consistency

٣ - الكفاءة Relative Efficiency

٤ - الكفاية Sufficiency

وندرس هذه الخواص بشيء من التفصيل ولكن يجب التأكيد منذ البداية على أنه يصعب، في غالب الأحيان، الحصول على مقدّر تتوفر فيه جميع هذه الخواص.

### (١ - ١ - ١ - ٦) عدم التحيز

إذا كان المتغير س له دالة كثافة الاحتمال ح (س ؛ $\theta$) تعتمد على معلمة واحدة وقدرنا هذه المعلمة بالمقدّر $\hat{\theta}$، فإنه يقال أن $\hat{\theta}$، مقدّر غير متحيز للمعلمة $\theta$ إذا كان:

ت $(\hat{\theta}) = \theta$ أو ت $(\hat{\theta}) - \theta$ = صفر (١ - ١ - ٦)

أما إذا كان ت $(\hat{\theta}) \neq \theta$ فإن المقدّر $\hat{\theta}$ متحيز للمعلمة $\theta$ ومقدار التحيز هو:

مقدار التحيز= ت $(\hat{\theta}) - \theta$ (٢ - ١ - ٦)

ونوضح فكرة عدم التحيز والتحقق منها حسابياً بالأمثلة التالية:

**مثال ١ :**

إذا فرضنا أن لدينا مجتمعاً حجمه ن = ٥ ومفرداته هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

وأردنا أن نحقق حسابياً أن الوسط الحسابي للعينة $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن}$ غير متحيز لمتوسط المجتمع $\mu$ وأن التباين للعينة $ع^2 = \frac{1}{ن - 1}$ مجـ $(س - \bar{س})^2$ غير متحيز لتباين المجتمع فإنه يمكن تحقيق ذلك باختيار عينات بأحجام مختلفة على النحو التالي:

**الحالة الأولى**: حجم العينة ن = ٢، عدد العينات الممكنة = $^{5}ق_{2}$ = ١٠، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبيّنة في الجدول التالي:

| العينة | الوسط الحسابي للعينة ($\bar{س}$) | التباين من العينة ($ع^2$) |
|---|---|---|
| ٢،١ | ١,٥ | ٠,٥٠ |
| ٣،١ | ٢,٠ | ٢,٠٠ |
| ٤،١ | ٢,٥ | ٤,٥٠ |
| ٥،١ | ٣,٠ | ٨,٠٠ |
| ٣،٢ | ٢,٥ | ٠,٥٠ |
| ٤،٢ | ٣,٠ | ٢,٠٠ |
| ٥،٢ | ٣,٥ | ٤,٥٠ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣، ٤ | ٣,٥ | ٠,٥٠ |
| ٣، ٥ | ٤,٠ | ٢,٠٠ |
| ٤، ٥ | ٤,٥ | ٠,٥٠ |
| المجموع | ٣٠,٠ | ٢٥,٠٠ |

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية = $\frac{٣٠}{١٠}$ = ٣ ويساوي متوسط المجتمع وهذا يحقق أن $\bar{س}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\mu$.

الوسط الحسابي للإنحرافات المعيارية = $\frac{٢٥}{١٠}$ = ٢٫٥ ويساوي تباين المجتمع وهذا يحقق أن ع$^٢$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\sigma^2$.

**الحالة الثانية**: حجم العينة ن = ٣، عدد العينات الممكنة = $^٥ق_٣$ = ١٠، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبيّنة في الجدول التالي:

| العينة | الوسط الحسابي للعينة ($\bar{س}$) | التباين من العينة (ع$^٢$) |
|---|---|---|
| ١، ٢، ٣ | ٢ | ١ |
| ١، ٢، ٤ | ٢ $\frac{١}{٣}$ | ٢ $\frac{٢}{٦}$ |
| ١، ٢، ٥ | ٢ $\frac{٢}{٣}$ | ٤ $\frac{٢}{٦}$ |
| ١، ٣، ٤ | ٢ $\frac{٢}{٣}$ | ٢ $\frac{٢}{٦}$ |
| ١، ٣، ٥ | ٣ | ٤ |
| ١، ٤، ٥ | ٣ $\frac{١}{٣}$ | ٤ $\frac{٢}{٦}$ |
| ٢، ٣، ٤ | ٣ | ١ |

| | | |
|---|---|---|
| ٢، ٣، ٥ | $\frac{١}{٣}$ ٣ | $\frac{٢}{٦}$ ٢ |
| ٢، ٤، ٥ | $\frac{٢}{٣}$ ٣ | $\frac{٢}{٦}$ ٢ |
| ٣، ٤، ٥ | ٤ | ١ |
| المجموع | ٣٠ | ٢٥ |

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية = $\frac{٣٠}{١٠}$ = ٣ ويساوي متوسط المجتمع $\mu$
وهذا يحقق أن $\overline{س}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\mu$.

الوسط الحسابي للإنحرافات المعيارية = $\frac{٢٥}{١٠}$ = ٢,٥ ويساوي تباين المجتمع $\sigma^٢$ وهذا يحقق أن $ع^٢$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\sigma^٢$ .

**الحالة الثالثة**: حجم العينة ن = ٤، عدد العينات الممكنة = $^٥ق_٤$ = ٥، العينات وأوساطها الحسابية وانحرافاتها المعيارية مبيّنة في الجدول التالي:

| العينة | الوسط الحسابي للعينة ($\overline{س}$) | التباين من العينة ($ع^٢$) |
|---|---|---|
| ١، ٢، ٣، ٤ | ٢,٥٠ | ١,٦٦٦٧ |
| ١، ٢، ٣، ٥ | ٢,٧٥ | ٢,٩١٦٧ |
| ١، ٢، ٤، ٥ | ٣,٠٠ | ٣,٣٣٣٢ |
| ١، ٣، ٤، ٥ | ٣,٢٥ | ٢,٩١٦٧ |
| ٢، ٣، ٤، ٥ | ٣,٥٠ | ١,٦٦٦٧ |
| المجموع | ١٥,٠٠ | ١٢,٥٠٠٠ |

الوسط الحسابي للأوساط الحسابية = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣ ويساوي متوسط المجتمع $\mu$
وهذا يحقق أن $\overline{س}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\mu$.

الوسط الحسابي للإنحرافات المعيارية $= \frac{12,5}{5} = 2,5$ ويساوي تباين المجتمع $\sigma^2$ وهذا يحقق أن $ع^2$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\sigma^2$

**مثال ٢ :**

اثبت أن الوسط الحسابي للعينة $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$ مقدّر غير متحيز لمتوسط المجتمع $\mu$

$$ت(\overline{س}) = ت\left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}\right) = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ت(س_ر)}{ن} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \mu}{ن}$$

$$= \frac{ن\,\mu}{ن} = \mu$$

$$ت(\overline{س}) - \mu = \mu - \mu = \text{صفر}$$

وهذا يحقق المعادلة (١ ـ ١ ـ ٦)، أي أن $\overline{س}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\mu$.

**مثال ٣ :**

تباين العينة المعرّف كما يلي

$$ع^2 = \frac{1}{ن} \sum (س - \overline{س})^2$$

مقدّر متحيز لتباين المجتمع $\sigma^2$ ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

$$ت(ع^2) = ت\left(\frac{1}{ن} \sum (س - \overline{س})^2\right)$$

وبالقسمة بسطاً ومقاماً على $\sigma^2$ فإن

$$ت(ع^2) = \frac{\sigma^2}{ن} ت\left(\frac{\sum (س - \overline{س})^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{ن} ت(\chi^2_{ن-1})$$

$$= \frac{1}{ن} (ن - 1)\sigma^2$$

$$= \frac{ن - 1}{ن} \sigma^2$$

أي أن $ع^2$ المعرفة بالصيغة السابقة مقدر متحيز للمعلمة $\sigma^2$ ومقدار التحيز طبقاً للمعادلة (٢ ـ ١ ـ ٦) هو

$$\text{مقدار التحيز} = ت(ع^2) - \sigma^2$$

$$= \frac{ن - ١}{ن}\sigma^2 - \sigma^2$$

$$= \frac{ن\sigma^2 - \sigma^2 - ن\sigma^2}{ن}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{ن}$$

من الملاحظ أن

$$\lim_{ن \to \infty} \left(-\frac{\sigma^2}{ن}\right) = \text{صفر}$$

أي أن مقدار التحيز يقل كلما زاد حجم العينة.

أما إذا عرفنا $ع^2$ على النحو التالي:

$$ع^2 = \frac{١}{ن - ١} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2$$

فإن $ت(ع^2) = \sigma^2$

أي أن $ع^2$ المعرّفة بهذه الصيغة مقدّر غير متحيز للمعلمة $\sigma^2$

### (٢ ـ ١ ـ ١ ـ ٦) الاتساق

المقدّر المتسق هو الذي تتناقص فيه المخاطرة بزيادة حجم العينة، وبتعبير آخر فإن المقدّر المتسق هو الذي يعطي تقديراً أفضل، إذا كان محسوباً من عينة حجمها ٥٠ مشاهدة من التقدير الذي يعطيه إذا كان حجم العينة ٣٠ مشاهدة.

فإذا فرضنا أن المخاطرة في اختيار مقدّر يعتمد على ن مشاهدة، $\hat{\theta}_ن$، للمعلمة $\theta$ هي

$$م(\hat{\theta}_ن، \theta) = ت(\hat{\theta}_ن - \theta)^2 \qquad (٣ ـ ١ ـ ٦)$$

وإذا فرضنا أن لدينا سلسلة من التقديرات التي نحسبها باستخدام هذا المقدّر

من عينات أحجامها ١، ٢، ٣، .... ، ر، .... ن فإنه يمكن وضع فكرة الإتساق على النحو التالي:

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \; م\,(\hat{\theta}_ن ،\ \theta) = \text{صفر} \qquad (٤ - ١ - ٦)$$

أي أن

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \; ت\,(\hat{\theta}_ن - \theta)^{٢} = \text{صفر} \qquad (٥ - ١ - ٦)$$

وبصيغة أخرى يكون المقدّر متسقا كلما تضاءل الفرق، بين التقدير الذي نحصل عليه باستخدام هذا المقدّر وقيمة المعلمة الحقيقية، بزيادة حجم العينة، أي أن:

$$ح\,(\,|\hat{\theta}_ن - \theta| > \delta\,) < \xi \qquad (٦ - ١ - ٦)$$

حيث $\delta$ قيمة محددة، $\xi$ قيمة صغيرة جداً

أو

$$\text{نهـا}_{ن \leftarrow \infty} \; ح\,(\,|\hat{\theta}_ن - \theta| > \delta\,) = \text{صفر} \qquad (٧ - ١ - ٦)$$

أي أن المقدّر $\hat{\theta}$ متسق للمعلمة $\theta$ إذا كانت $\hat{\theta}$ تتقارب تقارباً إحتمالياً Convergence in Probability إلى المعلمة $\theta$ كلما زاد حجم العينة ن.

ويمكن توضيح فكرة الاتساق حسابياً باستخدام نتائج مثال ١ في الفقرة (١ - ١ - ١ - ٦):

**أولاً:** الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ كمقدّر متّسق لمتوسط المجتمع.

الحالة الأولى (حجم العينة ن = ٢): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع $\mu$ وأقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ١,٥

الحالة الثانية (حجم العينة ن = ٣): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع $\mu$ وأقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ١,٠

الحالة الثالثة (حجم العينة ن = ٤): الفرق المطلق بين قيمة متوسط المجتمع $\mu$ وأقل قيمة أو أكبر قيمة للوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ = ٠,٥

الحالة الرابعة (حجم العينة ن = ٥، الحصر الشامل): قيمة متوسط المجتمع $\mu$ = قيمة الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$.

يلاحظ مما سبق أن قيمة الفرق تتضاءل كلما زاد حجم العينة وهذا يدل على أن الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ مقدّر متسق لمتوسط المجتمع

**ثانياً** تباين العينة ع$^{2}$ كمقدَّر متسق لتباين المجتمع.

الحالة الأولى (حجم العينة ن = ٢): الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأقل قيمة لتباين العينة ع$^{2}$ = ٢,٥ − ٠,٥ = ٢.

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأكبر قيمة لتباين العينة ع$^{2}$ = ٢,٥ − ٤,٥ = ٢.

الحالة الثانية (حجم العينة ن = ٣): الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأقل قيمة لتباين العينة ع$^{2}$ = ٢,٥ − ١ = ١,٥

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأكبر قيمة لتباين العينة

$$ع^{2} = ٢,٥ - ٤\frac{٢}{٦} = ١\frac{٥}{٦}$$

الحالة الثالثة (حجم العينة ن = ٤): الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأقل قيمة لتباين العينة ع$^{2}$ = ٢,٥ − ١,٦٦٦٧ = ٠,٨٣٣٣

الفرق المطلق بين قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ وأكبر قيمة لتباين العينة ع$^{2}$ = ٢,٥ − ٣,٣٣٣٣ = ٠,٨٣٣٣

الحالة الرابعة (حجم العينة ن = ٥، الحصر الشامل): قيمة تباين المجتمع $\sigma^{2}$ = قيمة تباين العينة ع$^{2}$.

يلاحظ مما سبق أن قيمة الفرق تتضاءل كلما زاد حجم العينة وهذا يدل على أن تباين العينة ع$^{2}$ مقدّر متسق لتباين المجتمع.

مثال: يمكن أن نثبت رياضياً أن الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ مقدّر متسق لمتوسط المجتمع باستخدام نظرية تشيبيشيف، والمعرفة بالمعادلة (٢١ - ١ - ٥)، على النحو التالي:

$$ت(\bar{س}) = \mu$$

$$تبا(\bar{س}) = \frac{\sigma^2}{ن}$$ إذا كان مجتمع الدراسة غير محدود أو كانت المعاينة مع الإعادة.

$$ح\left(|\bar{س} - \mu| > \frac{\sigma}{ن^{1/4}}\right) < \frac{1}{\sqrt{ن}}$$

$$\therefore \lim_{ن \to \infty} ح\left(|\bar{س} - \mu| \geq \epsilon\right) = صفر$$

أي أن $\bar{س}$ مقدّر متسق للمعلمة $\mu$

(٣ - ١ - ١ - ٦) الكفاءة النسبية

إذا كان المتغير س له دالة كثافة إحتمال ح (س؛ $\theta$) بمعلمة واحدة $\theta$ وكان $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ مقدرين غير متحيزين للمعلمة $\theta$، فإننا نقول أن $\hat{\theta}_1$ ، اكفأ من $\hat{\theta}_2$ إذا كان

$$تبا(\hat{\theta}_1) < تبا(\hat{\theta}_2) \qquad (٦ - ١ - ٨)$$

أو

$$\frac{تبا(\hat{\theta}_1)}{تبا(\hat{\theta}_2)} < 1 \qquad (٦ - ١ - ٩)$$

والمعادلة (٩ - ١ - ٦) تعطي مقياساً لكفاءة Measure of Efficiency المقدّر $\hat{\theta}_2$ بالنسبة إلى $\hat{\theta}_1$. وإذا وجد مقدّر غير متحيز $\hat{\theta}_1$ وكان تباينه أقل من تباين أي مقدّر آخر غير متحيز فإننا نقول أن $\hat{\theta}_1$. Minimum Variance Unbiased Estimator of $\theta$ (M.V.U)

وإذا وجد المتغير الكفء فهو وحيد Unique ويمكن إثبات ذلك كما يلي:

إذا كان $\hat{\theta}_1$، $\hat{\theta}_2$ مقدرين كفؤين غير متحيزين للمعلمة $\theta$ فإن

$$ت(\hat{\theta}_1) = ت(\hat{\theta}_2) = \theta \qquad (٦ - ١ - ١٠)$$

وإذا فرضنا أن أقل تباين ممكن لمقدّر غير متحيز هو $\sigma^{2}$ وإن

تبا ( $\hat{\theta}_{1}$ ) = تبا ( $\hat{\theta}_{2}$ ) = $\sigma^{2}$ (١١ - ١ - ٦)

وعرّفنا مقدّرا جديدا $\hat{\theta}$ كما يلي

$\hat{\theta} = \frac{1}{2} (\hat{\theta}_{1} + \hat{\theta}_{2})$ (١٢ - ١ - ٦)

فإنه باستخدام (١٠ - ١ - ٦)، (١١ - ١ - ٦) نجد أن:

ت ( $\hat{\theta}$ ) = $\theta$ (١٣ - ١ - ٦)

تبا ( $\hat{\theta}$ ) = $\frac{1}{4}$ { تبا ( $\hat{\theta}_{1}$ ) + تبا ( $\hat{\theta}_{2}$ ) + ٢ تغا ( $\hat{\theta}_{1}$، $\hat{\theta}_{2}$ ) }

$= \frac{1}{4} (\sigma^{2} + \sigma^{2} + 2 \rho \sigma \sigma)$

$= \frac{1}{2} \sigma^{2} (1 + \rho)$ (١٤ - ١ - ٦)

حيث $\rho$ معامل الارتباط بين $\hat{\theta}_{1}$، $\hat{\theta}_{2}$.

وبما أن $\hat{\theta}_{1}$، $\hat{\theta}_{2}$ مقدّران غير متحيزين وتباينيهما أقل ما يمكن (MVU)، فإن هذا يعني، باستخدام (١٤ - ١ - ٦)، إن

تبا ( $\hat{\theta}$ ) $= \frac{1}{2} \sigma^{2} (1 + \rho) \geqslant \sigma^{2}$

أي أن

$1 + \rho \geqslant 2$

$\rho \geqslant 1$

وحيث أن $\rho$ لا يمكن أن تكون أكبر من ١ فإنه لا بد وأن $\rho = 1$

وعلى هذا فان $\hat{\theta}_{1}$، $\hat{\theta}_{2}$ يرتبطان بعلاقة خطية على الشكل التالي:

$\hat{\theta}_{1} = \beta_{1} \hat{\theta}_{2} + \beta_{0}$ (١٥ - ١ - ٦)

$\therefore$ تبا ( $\hat{\theta}_{1}$ ) = $\beta_{1}^{2}$ تبا ( $\hat{\theta}_{2}$ ) + تبا ( $\beta_{0}$ )

$= \beta_{1}^{2} \sigma^{2}$ + صفر

$= \beta_{1}^{2} \sigma^{2}$ (١٦ - ١ - ٦)

وحيث أن تبا ( $\hat{\theta}_{1}$ ) = $\sigma^{2}$ (من المعادلة (١١ - ١ - ٦) فإنه لا بد وأن تكون $\beta_{1} = \pm 1 = 1$ في هذه الحالة وبذلك تؤول المعادلة (١٥ - ١ - ٦) إلى

$\hat{\theta}_{1} = \hat{\theta}_{2} + \beta_{0}$ (١٧ - ١ - ٦)

ومن المعادلة (١٠ ـ ١ ـ ٦) فلا بد وإن $\beta$. = صفر، وبالتعويض عن قيمتها في المعادلة (١٧ ـ ١ ـ ٦) فإن

$$\hat{\theta}_{١} = \hat{\theta}_{٢}$$

**مثال**: إذا كان المتغير س له توزيع طبيعي بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^{٢}$، وأخذنا من هذا المجتمع عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة حجمها ن، فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي لهذه العينة ($\overline{س}$) هو التوزيع الطبيعي Exactly Normal Distribution بتوقع $\mu$ وتباين $\frac{\sigma^{٢}}{ن}$، وتوزيع المعاينة لوسيط هذه العينة (و) هو التوزيع الطبيعي بالتقريب Asymptotically Normal Distribution بتوقع $\mu$ وتباين $\frac{\pi \sigma^{٢}}{٢ ن}$

وبالتالي فإن الكفاءة النسبية للوسط الحسابي بالنسبة للوسيط هي:

$$\frac{\sigma^{٢}}{ن} \div \frac{\pi \sigma^{٢}}{٢ ن} = \frac{٢}{\pi} = ٠,٦٣٧ < ١،$$

أي أن الوسط الحسابي أكفأ من الوسيط لأن تباينه أقل.

(٤ ـ ١ ـ ١ ـ ٦) الكفاية

إذا كان $\hat{\theta}_{١}$، $\hat{\theta}_{٢}$ مقدرين للمعلمة $\theta$ فإن $\hat{\theta}_{١}$ مقدّر كاف للمعلمة إذا كان

$$ح(\hat{\theta}_{٢}، \theta \mid \hat{\theta}_{١}) = ح(\hat{\theta}_{١}، \hat{\theta}_{٢}) \quad (١٨ - ١ - ٦)$$

وحيث أنه يصعب تحقيق الشرط الوارد في المعادلة (١٨ - ١ - ٦) سواء كان المقدّر كافيا أم غير كاف، فإننا نستخدم طريقة Neyman والتي تسمى أحياناً طريقة التجزئة Factorization Method ويمكن صياغتها كما يلي:

«المقدّر $\hat{\theta}_{١}$ كاف للمعلمة $\theta$ إذا أمكن تجزئة دالة الإمكان Likelihood Function إلى جزئين، أحدهما يعتمد على المعلمة والمقدّر والآخر لا يعتمد على المعلمة.

فإذا رمزنا لدالة الإمكان بالرمز لـ وكانت دالة كثافة الأحتمال تعتمد على معلمة واحدة $\theta$ فإنه يمكن كتابة قاعدة التجزئة رمزيا كما يلي:

$$لـ(\theta؛ س_{١}، س_{٢}، \ldots، س_{ن}) = لـ_{١}(\hat{\theta}_{١}، \theta)\, لـ_{٢}(س_{١}، س_{٢}، \ldots، س_{ن}) \quad (١٩ - ١ - ٦)$$

## دالة الإمكان Likelihood Function

يمكن صياغة دالة الإمكان بشكل عام كما يلي:

إذا كانت س١، س٢، ....، سن مجموعة من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتمال ح (س؛ $\theta$) تعتمد على معلمة واحدة $\theta$، فإن:

$$\text{ل}(\theta، \text{س}_1، \text{س}_2، \ldots، \text{س}_\text{ن}) = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}(\text{س}_\text{ر}؛ \theta) \qquad (\text{٢٠ - ١ - د})$$

وتسمى دالة الإمكان أيضاً دالة الكثافة المشتركة Joint Density Function فمثلاً إذا كان المتغير س يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط $\mu$ (غير معلوم) وتباين $\sigma^2$ (معلوم) فإن دالة الإمكان الأكبر

$$\text{ل}(\mu؛ \text{س}_1، \text{س}_2، \ldots، \text{س}_\text{ن}) = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \text{هـ}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\text{س}_\text{ر} - \mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^{\text{ن}} \text{هـ}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ر} - \mu)^2}$$

**مثال ١**

إذا كانت س١، س٢، ...، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^2 = 1$ فإنه يمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة باستخدام المعادلة (٢٠ - ١ - ٦)، كما يلي:

$$\text{ل}(\mu، 1؛ \text{س}_1، \text{س}_2، \ldots، \text{س}_\text{ن}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\text{ط}}}\right)^{\text{ن}} \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ر} - \mu)^2}$$

وحيث أن $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ر} - \mu)^2 = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2 + \text{ن}(\bar{\text{س}} - \mu)^2$

وبالتعويض في دالة الكثافة المشتركة فإن:

$$\text{ل}(\mu، 1؛ \text{س}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\text{ط}}}\right)^{\text{ن}} \text{هـ}^{-\frac{\text{ن}}{2}(\bar{\text{س}} - \mu)^2}$$

$$\times\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^2}$$

وحيث أنه يمكن تجزئة دالة الإمكان إلى جزئين:

الأول: $ل_1 (\bar{س} ، \mu) = هـ^{-\frac{ن}{2} \sum_{ر=1} (\bar{س} - \mu)^2}$ يعتمد على المعلمة والمقدر $\bar{س}$

الثاني: $ل_2 (س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن) = \left(\frac{1}{\sqrt{2ط}}\right)^ن - \frac{1}{2} \sum (س_ر - \bar{س})^2$

لا يعتمد على المعلمة.

وباستخدام نظرية نيمان Neyman

فإنه يمكن القول أن $\bar{س}$ مقدّر كاف للمعلمة $\mu$.

مثال ٢

إذا كانت $س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة إحتمال

$$ح (س ؛ \alpha) = \frac{1}{\alpha} هـ^{-\frac{س}{\alpha}} \qquad صفر < س < \infty$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

فإنه يمكن كتابة دالة الكثافة المشتركة باستخدام المعادلة (٢٠ ـ ١ ـ ٦) كما يلي:

$$ل (\alpha ، س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن) = \frac{1}{\alpha^ن} هـ^{-\frac{\sum س}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^ن} هـ^{-\frac{ن \bar{س}}{\alpha}}$$

وحيث أنه يمكن تجزئة دالة الإمكان إلى جزئين:

الأول: $ل_1 (\bar{س} ، \alpha) = \frac{1}{\alpha^ن} هـ^{-\frac{ن \bar{س}}{\alpha}}$ يعتمد على المعلمة $\alpha$ والمقدّر $\bar{س}$

الثاني: $ل_2 (س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن) = 1$ لا يعتمد على المعلمة، وباستخدام نظرية التجزئة (نيمان Neyman) فإن $\bar{س}$ مقدّر كاف للمعلمة $\alpha$.

مثال ٣:

إذا كانت $س_1 ، س_2 ، \ldots ، س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة

مأخوذة من التوزيع المنتظم:

$$ح\,(س؛ \theta_1، \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \qquad \theta_1 < س < \theta_2$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أثبت أن القيمة الصغرى $س_{(1)}$ والقيمة الكبرى $س_{(ن)}$ معا مقدرين كافيين للمعلمتين $\theta_1$، $\theta_2$.

دالة الكثافة المشتركة هي:

$$ل\,(\theta_1، \theta_2؛ س_1، س_2، \ldots\ldots، س_ن) = \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right)^{ن}$$

وحيث أنه يمكن تجزئة هذه الدالة إلى جزئين:

الأول: $ل_1\,(س_{(1)}، س_{(ن)}؛ \theta_1، \theta_2) = \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right)^{ن}$ يعتمد على المعلمتين $\theta_1$، $\theta_2$ والمقدرين $س_{(1)}$، $س_{(ن)}$.

الثاني: $ل_2\,(س_1، س_2، \ldots\ldots، س_ن) = 1$ لا يعتمد على المعلمتين،

وباستخدام نظرية التجزئة (نيمان Neyman) فإن $س_{(1)}$، $س_{(ن)}$ مقدران كافيان للمعلمتين $\theta_1$، $\theta_2$.

### (٢ ـ ١ ـ ٦) طرق التقدير بنقطة

نستعرض باختصار طرق التقدير التالية:

١ ـ طريقة العزوم — Moments Method

٢ ـ طريقة الإمكان الأكبر — Maximum Likelihood Method

٣ ـ طريقة المربعات الصغرى — Least Squares Method

### (١ ـ ٢ ـ ١ ـ ٦) طريقة العزوم

وهي أقدم طرق التقدير وكان أول من أشار إليها كارل بيرسون. وحيث أن عزوم المجتمعات دوال بمعالم هذه المجتمعات فإننا نحصل على تقديرات لهذه المعالم بمساواة العزوم المتناظرة في الدرجة في كل من المجتمع والعينة. فإذا رمزنا للعزم الواوي حول الصفر للعينة بالرمز $م'_و$ والعزم الواوي حول الصفر للمجتمع بالرمز $\mu'_و$ فإن:

$$م'_و = \mu'_و \qquad و = ٠، ١، ٢، \ldots\ldots \qquad (٢١ - ٢ - ٦)$$

ويجب أن يكون عدد المعادلات التي نكوّنها مساوياً لعدد المعالم التي نرغب في تقديرها. فإذا كان المتغير س له دالة كثافة إحتمال ح ( س؛ $\theta_1$، $\theta_2$، . . . . ، $\theta_و$) تعتمد على المعالم غير المعلومة $\theta_1$، $\theta_2$، . . . . ، $\theta_و$ فإننا نكون المعادلات الآتية:

$$م'_1 = \mu'_1 ، م'_2 = \mu'_2 ، . . . . ، م'_و = \mu'_و \qquad (٢٢ - ٢ - ٦)$$

وبحل المعادلات (٢٢ - ٢ - ٦) فإننا نحصل على مقدرات العزوم للمعالم $\theta_1$، $\theta_2$، . . . . ، $\theta_و$

مثال ١ : إذا كان المتغير س يتبع توزيع بواسون بدالة كثافة إحتمال

$$ح\ (س = ر) = هـ^{-\theta} \frac{\theta^ر}{ر!} \qquad ، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . .$$

$$فإن\ \mu'_1 = \sum_{ر=٠}^{\infty} ر\ هـ^{-\theta} \frac{\theta^ر}{ر!} = \theta$$

وإذا كانت س١، س٢، . . . . ، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من هذا المجتمع فإن

$$م'_1 = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

وإذا عوضنا في المعادلة (٢٢ - ٢ - ٦) فإن

$$\hat{\theta} = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

مثال ٢ : إذا كان المتغير س يتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال

$$ح\ (س؛ \theta) = \frac{١}{\theta} \qquad ، صفر < س < \theta$$

$$= صفر \qquad فيما\ عدا\ ذلك$$

$$فإن\ \mu'_1 = \int_{٠}^{\theta} س \frac{١}{\theta}\ د\ س = \frac{\theta}{٢}$$

وإذا كانت س١، س٢، . . . . ، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من هذا المجتمع فإن

$$م'_1 = \frac{مجـ\ س}{ن}$$

وإذا عوضنا في المعادلة (٢٢ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}}$$

أي أن مقدّر العزوم $\hat{\theta} = \frac{\text{٢ مجـ س}}{\text{ن}} = ٢\ \overline{\text{س}}$

(٢ ـ ٢ ـ ١ ـ ٦) طريقة الإمكان الأكبر

إذا كانت $س_1$، $س_2$، . . . . ، $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة إحتمال ح(س؛ $\underline{\theta}$) حيث $\underline{\theta} = (\theta_1، \theta_2، \theta_3 \ldots \theta_و)$ فإننا نختار $د_1$ ($س_1$، $س_2$، . . . ، $س_ن$)، $د_2$ ($س_1$، $س_2$، . . . . $س_ن$)، . . . . ، $د_و$ ($س_1$، $س_2$، . . . . ، $س_ن$) كمقدرات لهذه المعالم بحيث تكون قيمة دالة الإمكان المعطاة بالمعادلة (٢٠ ـ ١ ـ ٦) نهاية عظمى. وإذا توفرت شروط معينة Regularity Conditions فإن مقدرات الإمكان الأكبر عبارة عن حلول المعادلات التالية والتي نتوصل إليها بمساواة المعاملات التفاضلية الجزئية للوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة للمعالم بالصفر:

$$\frac{\partial\, \text{لن ل}(\underline{س}\,؛\, \underline{\theta})}{\partial \theta_1} = \text{صفر}$$

$$\frac{\partial\, \text{لن ل}(\underline{س}\,؛\, \underline{\theta})}{\partial \theta_2} = \text{صفر} \qquad (٢٣ ـ ٢ ـ ٦)$$

$$\frac{\partial\, \text{لن ل}(\underline{س}\,؛\, \underline{\theta})}{\partial \theta_و} = \text{صفر}$$

وفي حالة عدم توفر هذه الشروط، فإننا نستخدم المنطق Commonsense بدلاً من حساب التفاضل في إيجاد مقدرات الإمكان الأكبر. والأمثلة التالية توضح كيفية ايجاد مقدرات الإمكان الأكبر بالطرق المختلفة.

مثال ١ :

إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة حجمها ن مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال

$$ح(س ؛ \theta) = \frac{1}{\theta^2} س هـ^{-\frac{س}{\theta}} \qquad س > صفر$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة $\theta$.

الحل

دالة الإمكان هي

$$لـ(\theta ؛ \underline{س}) = \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{ن} س_1 \cdot س_2 \cdot \ldots\ldots \cdot س_ن هـ^{-\frac{1}{\theta}مجـ س}$$

$$= \theta^{-2ن} \prod_{ر=1}^{ن} س_ر هـ^{-\frac{1}{\theta}مجـ س}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$لـن لـ(\theta ؛ \underline{س}) = -2 ن لن \theta + لن \prod_{ر=1}^{ن} س_ر - \frac{1}{\theta} \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$$

وبمفاضلة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى $\theta$ ومساواة المعامل التفاضلي بالصفر فإن:

$$\frac{د لن لـ(\theta ؛ \underline{س})}{د \theta} = -2 ن \times \frac{1}{\theta} + صفر + \frac{1}{\theta^2} \sum_{ر=1}^{ن} س_ر$$

$$= صفر$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى $\hat{\theta}$ فإن

$$\hat{\theta} = \frac{مجـ س}{2 ن}$$

**مثال ٢ :**

إذا كان المتغير س يتبع توزيع بواسون بدالة كثافة احتمال

$$ح(س = ر) = هـ^{-\theta} \frac{\theta^{ر}}{ر!} \qquad ر = 0 ، 1 ، 2 ، \ldots\ldots$$

وأخذنا عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة $س_1$ ، $س_2$ ، .... ، $س_ن$ على هذا المتغير أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة $\theta$ باستخدام هذه العينة.

**الحل**

دالة الإمكان هي :

$$ل(\theta ؛ \underline{س}) = \frac{هـ^{-ن\theta}\ \theta^{مجـ س}}{\prod_{ر=1}^{ن} س_ر!}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هو:

$$لن\ ل(\theta ؛ \underline{س}) = -ن\theta + \sum_{ر=1}^{ن} س_ر\ لن\ \theta - لن \prod_{ر=1}^{ن} س_ر!$$

وبمفاضلة لوغاريتم دالة الإمكان بالنسبة إلى $\theta$ ومساواة المعامل التفاضلي بالصفر نجد أن

$$\frac{د\ لن\ ل(\theta ؛ \underline{س})}{د\ \theta} = -ن + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{\theta} + صفر = صفر$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى $\hat{\theta}$ فإن

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$$

**مثال ٣:**

إذا كان المتغير س يتبع توزيع معتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$، وأخذنا عينة من المشاهدات المستقلة $س_1$ ، $س_2$ ، . . . . ، $س_ن$ على هذا المتغير، أوجد مقدّريْ الإمكان الأكبر للمعلمتين $\mu$ ، $\sigma^2$ باستخدام مشاهدات هذه العينة.

**الحل**

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المعتاد هي :

$$ح(س ؛ \mu ، \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2ط}\ \sigma}\ هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}(س-\mu)^2}$$

$$-\infty < س < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma^2 > صفر$$

ودالة الإمكان هي :

$$ل(\mu ، \sigma^2 ؛ \underline{س}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2ط}\,\sigma}\right) هـ^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{ر=1} (س - \mu)^2}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$لن ل(\mu ، \sigma^2 ؛ \underline{س}) = لن \left(\frac{1}{\sqrt{2ط}\,\sigma}\right)^ن - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \mu)^2$$

وبمفاضلة دالة الإمكان جزئيا بالنسبة إلى $\mu$ ، $\sigma^2$ ومساواة المشتقات الجزئية بالصفر فإن

$$\frac{\partial لن ل(\mu ، \sigma^2 ؛ \underline{س})}{\partial \mu} = صفر - صفر + \frac{2}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \hat{\mu})$$

$$= صفر$$

$$\frac{\partial لن ل(\mu ، \sigma^2 ؛ س)}{\partial \sigma^2}$$

$$= صفر - \frac{ن}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{2}{4(\hat{\sigma}^2)^2}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \hat{\mu})^2 = صفر$$

وبحل هاتين المعادلتين الآتيتين بالنسبة إلى $\hat{\mu}$ ، $\hat{\sigma}^2$ نجد أن

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} = \bar{س}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{ن}\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2$$

مثال ٤ :

إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له توزيع منتظم بدالة كثافة الاحتمال

$$ح(س ، \theta_1 ، \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \qquad \theta_1 < س < \theta_2$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أوجد مقدّري الإمكان الأكبر للمعلمتين $\theta_1$ ، $\theta_2$ .

الحل

دالة الإمكان هي

$$ل(\theta_1 ، \theta_2 ؛ \underline{س}) = \left(\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\right)^{ن}$$

أن استخدام قواعد التفاضل في هذه الحالة يؤدي إلى نتائج غير معقولة وبالتالي فإننا نلجأ إلى استخدام المنطق في تقدير معالم التوزيع.

إن هدفنا الأساسي هو أن نجعل دالة الإمكان نهاية عظمى ويمكن تحقيق ذلك بجعل المقدار $\theta_2 - \theta_1$ أقل ما يمكن. فإذا رتبنا مشاهدات العينة ترتيباً تصاعدياً فإننا نحصل على $س_{(1)}$ ، $س_{(2)}$ ، . . . . ، $س_{(ن)}$، وحيث أن $\theta_1$ لا يمكن أن تكون أكبر من أصغر قيمة و $\theta_2$ لا يمكن أن تكون أصغر من أكبر قيمة فإن أقل قيمة ممكنة للمقدار $\theta_2 - \theta_1$ هي $س_{(ن)} - س_{(1)}$ وبالتالي فإن مقدري الإمكان الأكبر للمعلمتين $\theta_1$ ، $\theta_2$ هما:

$$\hat{\theta}_1 = س_{(1)} ، \qquad \hat{\theta}_2 = س_{(ن)}$$

**مثال ٥:**

إذا كانت $س_1$ ، $س_2$ ، . . . ، $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال

$$ح(س؛ \theta) = (\theta + 1)\, س^{\theta} \qquad صفر < س < 1$$
$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أوجد مقدّر الإمكان الأكبر للمعلمة $\theta$.

الحل

دالة الامكان هي

$$ل(\theta ؛ \underline{س}) = (\theta + 1)^{ن}\, س_1^{\theta} ، س_2^{\theta} \; . \; . \; . \; . \; س_ن^{\theta}$$

لوغاريتم دالة الإمكان هو

$$لن\, ل(\theta ؛ \underline{س}) = ن\, لن\, (\theta + 1) + \theta\, لن\, س_1 + \theta\, لن\, س_2 + . . . . + \theta\, لن\, س_ن$$

$$= ن\, لن\, (\theta + 1) + \theta \sum_{ر=1}^{ن} لن\, س_ر$$

وبمفاضلة دالة الإمكان بالنسبة إلى $\theta$ ومساواة المشتقة التفاضلية بالصفر فإن

$$\frac{د\ لن\ لـ\ (\theta\ ؛\ س)}{د\ \theta} = \frac{ن}{\hat{\theta} + ١} + \sum_{ر=١}^{ن} لن\ س_ر = صفر$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة إلى $\hat{\theta}$ فإن

$$\hat{\theta} = \frac{ن}{\sum_{ر=١}^{ن} لن \frac{١}{س_ر}} - ١$$

**( ٣ - ٢ - ١ - ٦) طريقة المربعات الصغرى واستخدامها في تقدير معالم النماذج الإحصائية الخطية**

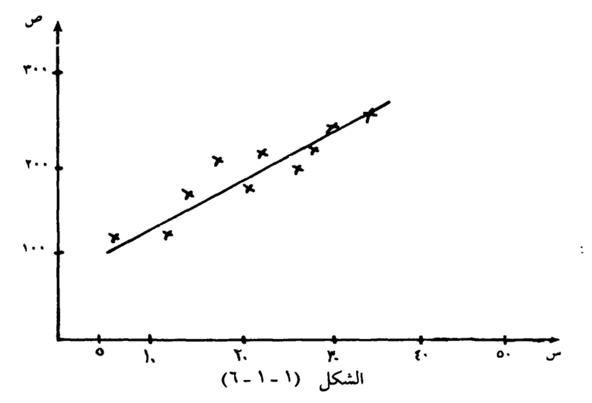
على الرغم من وجود عدد كبير من الطرق للتعبير عن متوسط المتغير التابع كدالة في متغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة فإننا نركز اهتمامنا على النماذج الخطية
Linear Statistical Models

ومهما كانت النماذج التي نستخدمها في التعبير عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة فإنها تقسم إلى مجموعتين أساسيتين:

نماذج تقريرية أو حتمية Deterministic Models ونماذج احتمالية Probabilistic Models

فإذا عبّرنا عن العلاقة بين س، ص، بالنموذج الخطي البسيط ص = أ س + ب، حيث أ، ب معالم غير معلومة، فإن هذا النموذج Deterministic لأنه لا يترك مجالاً للخطأ في التنبؤ بقيمة ص كدالة في المتغير س، وفي هذه الحالة فإن قيمة ص عندما س = ٢٠ مثلاً تكون دائماً أ × ٢٠ + ب.

أما إذا حصلنا على أزواج القيم المتناظرة ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، . . . ($س_ن$ ، $ص_ن$) ورسمنا الشكل الانتشاري كما هو مبين بالشكل (١ - ١ - ٦)




الشكل (١ - ١ - ٦)

فإننا نجد أن العلاقة بين س، ص لا يمكن وصفها باستخدام النموذج التقريري Deterministic لأن قيمة ص تتغير بطريقة عشوائية عندما س = ٢٠ وبالتالي فإن التنبؤ بقيمة ص عندما س = ٢٠ يكون معرضاً لبعض الخطأ. وفي هذه الحالة فإننا نعبّر عن العلاقة بين س، ص بالنموذج الإحتمالي Probabilistic Model

ص = أ س + ب + خ

أو بطريقة أخرى

ت(ص) = أ س + ب

حيث خ عبارة عن خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه $\sigma^2$ (كمية محدودة) وله توزيع احتمالي معروف أو غير معروف، أ، ب معالم غير معلومة.

**النماذج الإنحدارية الخطية Linear Regression Models**

بما أننا نركز اهتمامنا على النماذج الإحصائية الخطية فإننا نوضح فيما يلي المقصود بهذه النماذج، فإذا كان ص هو المتغير التابع و س متغير مستقل فإننا نعبر عن العلاقة بين س، ص باستخدام النموذج

ص = أ س + ب + خ

أو ت(ص) = أ س + ب

ويلاحظ في الصيغة الثانية أن ت (ص) دالة خطية في المتغير المستقل س (عند قيم محددة لـ أ ، ب) وكذلك دالة خطية في المعالم أ، ب، أما في النموذج

$$ت(ص) = أ س^{٢} + ب$$

فإن ت (ص) دالة خطية في المعالم أ ، ب وليست دالة خطية في س. والمقصود بالنماذج الإحصائية الخطية النماذج التي يكون فيها ت(ص) دالة خطية في المعالم غير المعلومة أ ، ب، وبالتالي فإن ص = أ لن س + ب + خ نموذج خطي لأن لن س كمية ثابتة معلومة.

نموذج الانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression Model

نموذج الانحدار الخطي العام General Linear Regression Model

أو نموذج الانحدار الخطي المتعدد Multiple Linear Regression Model

إذا كان النموذج يعبر عن ت(ص) كدالة خطية في المعلمتين أ ، ب فإنه يسمى نموذج الإنحدار البسيط كما هو مبيّن في المعادلة التالية:

$$ص = أ س + ب + خ \qquad (٢٤ - ٢ - ٦)$$

حيث أ ، ب معالم غير معلومة، خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه $\sigma^{٢}$ (كمية محدودة) وتوزيعه معلوم أو غير معلوم كما أن تغا ($خ_{ر}$ ، $خ_{و}$) = صفر إذا كانت ر $\neq$ و.

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد ($س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . ، $س_{و}$) وعبّرنا عن العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرات المستقلة $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، . . . ، $س_{و}$ على النحو التالي

$$ص = أ_{١} س_{١} + أ_{٢} س_{٢} + . . . . + أ_{و} س_{و} + خ \qquad (٢٥ - ٢ - ٦)$$

فإن هذا النموذج يسمى نموذج الإنحدار الخطي العام أو نموذج الإنحدار الخطي المتعدد حيث $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، . . . . $أ_{و}$ معالم غير معلومة، خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينة $\sigma^{٢}$ (كمية محدودة) وله توزيع معلوم أو غير معلوم، كما أن تغا ($خ_{ر}$ ، $خ_{و}$) = صفر إذا كانت ر $\neq$ و.

## تقدير معالم نموذج الإنحدار الخطي البسيط بطريقة المربعات الصغرى:

إذا كان لدينا أزواج القيم ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) ، ($س_{٢}$ ، $ص_{٢}$) ، . . . ، ($س_{ن}$ ، $ص_{ن}$) ورسمنا الشكل الانتشاري وتبيّن لنا من هذا الشكل أن العلاقة بين

المتغيرين س ، ص هي علاقة خطية بسيطة (المعادلة (٢٤ ـ ٢ ـ ٦))، فإننا نرسم خطاً يمر بمعظم النقط في الشكل الإنتشاري ويتوسط الباقي أحسن توسط يسمى الخط الموفق أو الخط الممهد Fitted Line. والمقصود بالخط الممهد أو الموفق هو أن يكون مجموع مربعات انحرافات الإحداثيات الصادية لنقط الإنتشار عن الخط الممهد (مجموع مربعات الأخطاء) أقل ما يمكن.

فإذا رمزنا للإنحراف الإحداثي الصادي المشاهد (ص) عن الإحداثي الصادي الممهد ($\hat{ص}$) بالرمز ح فإن مقياس جودة مطابقة الخط الممهد للبيانات المعطاة هو

$$ط = (ص_١ - \hat{ص}_١)^٢ + (ص_٢ - \hat{ص}_٢)^٢ + \ldots\ldots + (ص_ن - \hat{ص}_ن)^٢$$

$$= ح_١^٢ + ح_٢^٢ + \ldots\ldots ح_ن^٢ \qquad (٢٦ - ٢ - ٦)$$

فإذا كان هذا المقدار صغيراً فإن المطابقة جيدة وإذا كان كبيراً فإن المطابقة سيئة.

وطريقة المربعات الصغرى تُعنى بتحديد الخط المستقيم (من بين العدد اللانهائي من الخطوط المستقيمة) الذي يجعل المقدار ط أقل ما يمكن، وتعيين خط مستقيم يعني تحديد ثوابت المعادلة التي تمثله، أي تحديد قيمة واحدة لميل الخط المستقيم أ في المدى $- \infty < أ < + \infty$ وتحديد قيمة واحدة للجزء المقطوع من محور الصادات ب في المدى $- \infty < ب < + \infty$

ويمكن إعادة كتابة (٢٦ ـ ٢ ـ ٦) كما يلي

$$ط = \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - أ\,س_ر - ب)^٢ \qquad (٢٧ - ٢ - ٦)$$

وبمفاضلة (٢٧ ـ ٢ ـ ٦) جزئياً بالنسبة إلى أ ، ب على التوالي ومساواة المشتقات الجزئية بالصفر فإن

$$\frac{\partial ط}{\partial أ} = -٢ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر\,(ص_ر - أ\,س_ر - ب) = \text{صفر}$$

$$\frac{\partial ط}{\partial ب} = -٢ \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - أ\,س_ر - ب) = \text{صفر}$$

أي أن

$$\sum_{ر=1}^{ن} س_ر (ص_ر - أ س_ر - ب) = صفر$$

$$\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - أ س_ر - ب) = صفر \qquad (٦ - ٢ - ٢٨)$$

وتسمى (٢٨ ـ ٢ ـ ٦) المعادلتان الطبيعيتان Two Normal Equations

و $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ مقدرا المربعات الصغرى للمعلمتين أ ، ب.

وبحل هاتين المعادلتين فإن:

$$\hat{أ} = \frac{\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{\sum (س - \bar{س})^{٢}}$$

$$= \frac{\sum س ص - \frac{\sum س \cdot \sum ص}{ن}}{\sum س^{٢} - \frac{(\sum س)^{٢}}{ن}} \qquad (٦ - ٢ - ٢٩)$$

$$\hat{ب} = \bar{ص} - \hat{أ} \bar{س} \qquad (٦ - ٢ - ٣٠)$$

حيث $\bar{س}$ الوسط الحسابي للمتغير س ، $\bar{ص}$ الوسط الحسابي للمتغير ص.

**خواص مقدرات المربعات الصغرى:**

تنص نظرية جاوس ـ ماركوف على ما يلي:

١ ـ $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ مقـدران غير متحيزين للمعلمتين أ، ب، أي أن:

$$ت(\hat{أ}) = أ$$

$$ت(\hat{ب}) = ب$$

٢ ـ المقـدران $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ لهما تبـاين أقل من تبـاين أي مقـدرين آخـرين غـير متحيـزين وخطيين في المشاهدات $ص_١$ ، $ص_٢$ ، . . . ، $ص_ن$.

**خواص الخط الممهد:**

سوف نذكر هذه الخـواص ونترك بـرهنتها كتمـرين للقاريء، كـما نرمـز للخطأ

المقدّر بالرمز $\hat{خ}$ وهو عبارة عن $ص_ر - \hat{ص}_ر$ حيث $ص_ر$ القيمة الرائية المشاهدة للمتغير التابع، $\hat{ص}_ر$ القيمة الرائية الإتجاهية لهذا المتغير:

١ - مجموع الأخطاء المقدرة يساوي صفر، أي أن

$$\sum_{ر=1}^{ن} خ_ر = صفر$$

٢ - مجموع مربعات الأخطاء المقدرة نهاية صغرى، أي أن

$$\sum_{ر=1}^{ن} خ_ر^2 \text{ نهاية صغرى}$$

٣ - مجموع القيم المشاهدة يساوي مجموع القيم الإتجاهية، أي أن

$$\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر = \sum_{ر=1}^{ن} \hat{ص}_ر$$

٤ - $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \hat{خ}_ر = صفر$

٥ - $\sum_{ر=1}^{ن} \hat{ص}_ر \hat{خ}_ر = صفر$

٦ - الخط الممهد يمر دائماً بالنقطة ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$)، حيث $\bar{س}$ الوسط الحسابي للمتغير س ، $\bar{ص}$ الوسط الحسابي للمتغير ص

**توزيعا المعاينة للمقدرين $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$ :**

**أولاً توزيع المعاينة للمقدر $\hat{أ}$**

بالرجوع إلى المعادلة (٢٩ - ٢ - ٦) فإنه يمكن كتابة البسط على النحو التالي:

$$\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س}) ص_ر - \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س}) \bar{ص}$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س}) ص_ر \qquad (٣١ - ٢ - ٦)$$

وبالتالي فإن

$$\hat{أ} = \frac{\sum (س_ر - \bar{س}) ص_ر}{\sum (س_ر - \bar{س})^2} = \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر ص_ر \qquad (٣٢ - ٢ - ٦)$$

$$ك_ر = \frac{(س_ر - \bar{س})}{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢} \qquad (٣٣ - ٢ - ٦)$$

ولكي نتمكن من ايجاد القيمة المتوقعة والتباين وبالتالي توزيع المعاينة للمقدّر إننا ندرس فيما يلي خواص $ك_ر$ المعطاة قيمتها في المعادلة (٣٣ - ٢ - ٦).

$$\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{(س_ر - \bar{س})}{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢} = \frac{مجـ (س - \bar{س})}{مجـ (س - \bar{س})^٢} = صفر$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر س_ر = \frac{مجـ (س_ر - \bar{س}) س_ر}{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢}$$

وباستخدام المعادلة (٣١ - ٢ - ٦) فإن

$$\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر س_ر = \frac{مجـ (س_ر - \bar{س}) (س_ر - \bar{س})}{مجـ (س_ر - \bar{س})} = \frac{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢}{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢} = ١$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر^٢ = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{(س_ر - \bar{س})}{\{ مجـ (س_ر - \bar{س})^٢ \}^٢} = \frac{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢}{\{ مجـ (س - \bar{س})^٢ \}^٢}$$

$$= \frac{١}{مجـ (س_ر - \bar{س})^٢}$$

وهنة هذه الخصائص الثلاث فإنه يمكن إيجاد القيمة المتوقعة والتباين وتوزيع يه للمقدر $\hat{أ}$ كما يلي:

$$\hat{أ}) \quad = ت \left( \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر ص_ر \right)$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر ت (ص_ر)$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر ت (أ س_ر + ب + خ)$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر (أ س_ر + ب)$$

$$= أ \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر س_ر + ب \sum_{ر=١}^{ن} ك_ر$$

ستخدام الخاصيتين الأولى والثانية للمقدار $ك_ر$ فإن

$$ت (\hat{أ}) = أ \qquad (٣٤ - ٢ -$$

$$\text{تبا}(\hat{أ}) = \text{تبا}\left(\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر \, ص_ر\right)$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر^2 \, \text{تبا}(ص_ر)$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر^2 \, \text{تبا}(أ\, س_ر + ب + خ)$$

$$= \sigma^2 \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر^2$$

وباستخدام الخاصية الثالثة للمقدار $ك_ر$ فإن

$$\text{تبا}(\hat{أ}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2} \qquad (٣٥-٢-٦)$$

وبالتالي إذا كانت $\sigma^2$ معلومة فإن $\hat{أ}$ تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع أ وتباين $\frac{\sigma^2}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}$
أما إذا كانت $\sigma^2$ غير معلومة فإننا نقدرها كما سيأتي فيما بعد بمتوسط مجموع مربعات الأخطاء ويكون توزيع المعاينة هو توزيع ت بدرجات حرية ن − ٢.

ثانياً توزيع المعاينة للمقدّر $\hat{ب}$

لايجاد القيمة المتوقعة والتباين وبالتالي توزيع المعاينة للمقدّر $\hat{ب}$، فإننا نعيد كتابة المعادلة (٣٠ـ٢ـ٦) على النحو التالي:

$$\hat{ب} = \bar{ص} - \hat{أ}\,\bar{س}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن} - \hat{أ}\,\bar{س}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(أ\, س_ر + ب + خ_ر)}{ن} - \hat{أ}\,\bar{س}$$

والقيمة المتوقعة والتباين للمقدّر ب هما:

$$ت(\hat{ب}) = ت\left\{\frac{\sum(أ\, س_ر + ب + خ_ر)}{ن} - \hat{أ}\,\bar{س}\right\}$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(أ\, س_ر + ب)}{ن} - أ\,\bar{س}$$

$$= أ\,\bar{س} + ب - أ\,\bar{س}$$

$$= ب \qquad (٣٦-٢-٦)$$

$$\text{تبا}(\hat{ب}) = \text{تبا}\left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(أ\,س_ر + ب + خ_ر)}{ن} - \hat{أ}\,\overline{س}\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{ن} + \overline{س}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})^2}$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{ن} + \frac{\overline{س}^2}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})^2}\right) \qquad (٣٧ - ٢ - ٦)$$

وبالتالي إذا كانت $\sigma^2$ معلومة فإن $\hat{ب}$ تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع ب وتباين $\sigma^2 \left(\frac{1}{ن} + \frac{\overline{س}^2}{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})^2}\right)$. أما إذا كانت $\sigma^2$ غير معلومة فإننا نقدرها كما سيأتي فيما بعد بمتوسط مجموع مربعات الأخطاء، ويكون توزيع المعاينة هو توزيع ت بدرجات حرية ن -٢.

**توزيع المعاينة للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل $س_م$:**

من المعلوم أن القيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل $س_م$ ونرمز لها بالرمز $\hat{ص}_م$ تحسب من المعادلة التالية:

$$\hat{ص}_م = \hat{أ}\,س_م + \hat{ب} \qquad (٣٨ - ٢ - ٦)$$

ولايجاد القيمة المتوقعة والتباين وبالتالي توزيع المعاينة للمقدر $\hat{ص}_م$ فإننا نكتب المعادلة (٣٨ - ٢ - ٦) بالتعويض عن قيمة $\hat{ب}$ من المعادلة (٣٠ - ٢ - ٦)، على النحو التالي:

$$\hat{ص}_م = \hat{أ}\,س_م + \overline{ص} - \hat{أ}\,\overline{س}$$

$$= \hat{أ}\,(س_م - \overline{س}) + \overline{ص} \qquad (٣٩ - ٢ - ٦)$$

من المعادلة (٣٨ - ٢ - ٦) نجد أن

$$ت\,(\hat{ص}_م) = ت\,(\hat{أ}\,س_م + \hat{ب})$$

$$= أ\,س_م + ب = \mu\,(ص_م) \qquad (٤٠ - ٢ - ٦)$$

ومن المعادلة (٣٩ - ٢ - ٦) نجد أن:

$$\text{تبا}(\hat{ص}_م) = \text{تبا}\left(\hat{أ}\,(س_م - \overline{س}) + \overline{ص}\right)$$

$$= \text{تبا}\left(\hat{\text{أ}}\,(\text{س}_\text{م} - \overline{\text{س}})\right) + \text{تبا}\,(\overline{\text{ص}})$$

$$= (\text{س}_\text{م} - \overline{\text{س}})^{2}\ \text{تبا}\,(\hat{\text{أ}}) + \text{تبا}\left(\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_\text{ر}}{\text{ن}}\right)$$

$$= (\text{س}_\text{م} - \overline{\text{س}})^{2}\ \frac{\sigma^{2}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^{2}} + \frac{\sigma^{2}}{\text{ن}}$$

$$= \sigma^{2}\left(\frac{1}{\text{ن}} + \frac{(\text{س}_\text{م} - \overline{\text{س}})^{2}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^{2}}\right) \qquad (٦ - ٢ - ٤١)$$

وتوزيع المعاينة للمقدّر $\hat{\text{ص}}_\text{م}$، إذا كانت $\sigma^{2}$ معلومة، هو التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu(\text{ص}_\text{م})$ وتباين $\sigma^{2}\left(\frac{1}{\text{ن}} + \frac{(\text{س}_\text{م} - \overline{\text{س}})^{2}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ر} - \overline{\text{س}})^{2}}\right)$. أما إذا كانت $\sigma^{2}$ غير معلومة فإننا نقدرها بمتوسط مجموع مربعات الأخطاء ويكون توزيع المعاينة في هذه الحالة هو توزيع ت بدرجات حرية ن − ٢

**تقدير تباين الخطأ**

تباين الخطأ ($\sigma^{2}$) يكون في المعتاد غير معروف وفي هذه الحالة فإنه يجب تقديره لأغراض الاستدلال الإحصائي المتعلق بنموذج الإنحدار.

ولوضع أساس لتقدير تباين نموذج الإنحدار، فإننا نوضّح تقدير تباين مجتمع منفرد بتباين عينة عشوائية حجمها ن مأخوذة من هذا المجتمع. وتباين العينة عبارة عن مجموع مربعات إنحرافات مشاهداتها عن وسطها الحسابي مقسوماً على درجات الحرية، أي أن

$$\hat{\sigma}^{2}\ (\text{للمجتمع المنفرد}) = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_\text{ر} - \overline{\text{ص}})^{2}}{\text{ن} - 1} \qquad (٦ - ٢ - ٤٢)$$

حيث أننا نفقد درجة حرية واحدة باستخدام التقدير $\overline{\text{ص}}$.

أما في حالة نموذج الإنحدار فإن المشاهدات $\text{ص}_\text{ر}$ تأتي من توزيعات احتمالية مختلفة بمتوسطات غير متساوية، لذا يجب حساب إنحراف المشاهدة $\text{ص}_\text{ر}$ عن وسطها المقدّر $\hat{\text{ص}}_\text{ر}$، وبالتالي فإن

$$\hat{\sigma}^{2}\ (\text{لنموذج الانحدار}) = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_\text{ر} - \hat{\text{ص}}_\text{ر})}{\text{ن} - 2} \qquad (٦ - ٢ - ٤٣)$$

حيث أننا نفقد درجتي حرية باستخدام $\hat{أ}$ ، $\hat{ب}$، وتسمى $\hat{\sigma}^2$ متوسط مربعات الأخطاء Error Mean Square ونرمز له بالرمز MSE.

## تحليل التباين في نموذج الانحدار الخطي البسيط:

Analysis of Variance for the Simple Regression Model

إن مقدار التفاوت الكلي Total Variation أو تباين المتغير التابع ص يمكن تجزئته إلى جزئين على النحو التالي:

$$(ص_ر - \overline{ص}) = (ص_ر - \hat{ص}_ر) + (\hat{ص}_ر - \overline{ص})\text{ ، } ر = ١ ، ٢ ، \ldots\ldots ، ن$$

وبتربيع الطرفين والتجميع لكل القيم فإن

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢ = \sum_{ر=١}^{ن} \Big( (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ + (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^٢$$

$$+ ٢ (ص_ر - \hat{ص}_ر)(\hat{ص}_ر - \overline{ص}) \Big)$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^٢$$

$$+ ٢ \sum (ص_ر - \hat{ص}_ر) \hat{ص}_ر - ٢ \sum (ص_ر - \hat{ص}_ر) \overline{ص}$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^٢$$

$$+ ٢ \sum (ص_ر - \hat{أ} س_ر - \hat{ب}) (\hat{أ} س_ر + \hat{ب}) -$$

$$\overline{ص} \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{أ} س_ر - \hat{ب})$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^٢$$

$$+ ٢ \hat{أ} \sum_{ر=١}^{ن} س_ر (ص_ر - \hat{أ} س_ر - \hat{ب})$$

$$+ ٢ \hat{ب} \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{أ} س_ر - \hat{ب}) - \overline{ص} \sum (ص_ر - \hat{أ} س_ر - \hat{ب})$$

(٤٤ - ٢ - ٦)

وإذا عوضنا من (٢٨ ـ ٢ ـ ٦) في (٤٤ ـ ٢ ـ ٦) فإن الحدود الثالث والرابع والخامس من الطرف الأيسر للمعادلة (٤٤ ـ ٢ ـ ٦) تساوي صفر وبالتالي فإن

$$\sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \overline{ص})^٢ = \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢ + \sum_{ر=١}^{ن} (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^٢ \quad (٤٥ ـ ٢ ـ ٦)$$

أي أن

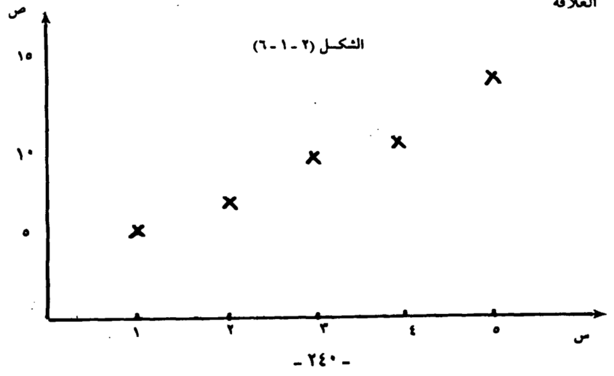
التفـاوت الكلي Total Variation = التفـاوت غير المفسر Unexplained Variation أو مجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية Error Sum of Squares (SSE) + التفاوت المفسّر Explained Variation أو مجموع المربعات الذي يُعزى للإنحدار (Re-gression Sum of Squares (SSR)

**تمرين توضيحي ١**

إذا كـان المتغـيران س، ص يـرتبـطان بعـلاقـة مـا يعتقـد بـأنها ص = أ س + ب + خ، وهي نفس المعـادلة المحـددة بالنمـوذج (٢٤ ـ ٢ ـ ٦)، وكان لـدينـا أزواج القيم التالية:

| س | ص |
|---|---|
| ٣ | ٩ |
| ١ | ٥ |
| ٢ | ٧ |
| ٥ | ١٤ |
| ٤ | ١٠ |

فإننا نبدأ برسم الشكـل الانتشاري التـالي ( الشكل (٢ ـ ١ ـ ٦) ) للتـأكد من شكـل العلاقة



الشكـل (٢ ـ ١ ـ ٦)

وهذا الشكل يؤكد أن المتغيرين س، ص يرتبطان بعلاقة خطية بسيطة، لذلك نقوم بإجراء الحسابات التالية لتقدير معالم هذا الخط أ، ب وتباينه $\sigma^2$ بنقطة Point Estimation واستخدام هذه المقدّرات وتوزيعاتها العينّية Sampling Distributions فيما بعد في تركيب فترات الثقة لهذه المعالم واختبار الفروض المتعلقة بها.

| | س | ص | س ص | $س^2$ | $\hat{ص}$ | $\hat{غ}$ = ص - $\hat{ص}$ | $\hat{غ}^2$ = (ص - $\hat{ص}$)$^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ٣ | ٩ | ٢٧ | ٩ | ٩ | صفر | صفر |
| | ١ | ٥ | ٥ | ١ | ٤,٨ | ٠,٢ | ٠,٠٤ |
| | ٢ | ٧ | ١٤ | ٤ | ٦,٩ | ٠,١ | ٠,٠١ |
| | ٥ | ١٤ | ٧٠ | ٢٥ | ١٣,٢ | ٠,٨ | ٠,٦٤ |
| | ٤ | ١٠ | ٤٠ | ١٦ | ١١,١ | ١,١ - | ١,٢١ |
| المجموع | ١٥ | ٤٥ | ١٥٦ | ٥٥ | ٤٥,٠ | صفر | ١,٩٠ |

وبالتعويض في (٢٩ - ٢ - ٦) ، (٣٠ - ٢ - ٦) فإن

$$\hat{أ} = \frac{١٥٦ - \frac{١٥ \times ٤٥}{٥}}{٥٥ - \frac{(١٥)^٢}{٥}}$$

$$= ٢,١$$

$$\hat{ب} = \frac{٤٥}{٥} - ٢,١ \frac{١٥}{٥}$$

$$= ٢,٧$$

$$\therefore \hat{ص} = ٢,١ \text{ س} + ٢,٧$$

وإذا عوضنا بقيم س في هذه المعادلة فإننا نحصل على القيم الإتجاهية أو المتوقعة للمتغير ص ($\hat{ص}$) والمبينة في العمود الخامس من الجدول السابق، أما تقديرات الأخطاء ومربعاتها فإنها مبينة في العمودين السادس والسابع. وإذا عوضنا مجموع العمود الأخير من هذا الجدول في المعادلة (٤٣ - ٢ - ٧) فإن

$$\text{MSE}(\hat{\sigma}^2) = \frac{١,٩}{٥ - ٢} = \frac{١,٩}{٣} = ٠,٦٣٣$$

ويمكن حساب التفاوت الكلي والاختلافين المفسر وغير المفسر كما يلي:

| $\text{ص} - \bar{\text{ص}}$ | $(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2$ | $\text{ص} - \hat{\text{ص}}$ | $(\text{ص} - \hat{\text{ص}})^2$ | $\hat{\text{ص}} - \bar{\text{ص}}$ | $(\hat{\text{ص}} - \bar{\text{ص}})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ٩ - ٩ = صفر | صفر | صفر | صفر | ٩ - ٩ = صفر | صفر |
| ٥ - ٩ = - ٤ | ١٦ | ٠,٢ | ٠,٠٤ | ٤,٨ - ٩ = - ٤,٢ | ١٧,٦٤ |
| ٧ - ٩ = - ٢ | ٤ | ٠,١ | ٠,٠١ | ٦,٩ - ٩ = - ٢,١ | ٤,٤١ |
| ١٤ - ٩ = ٥ | ٢٥ | ٠,٨ | ٠,٦٤ | ١٣,٢ - ٩ = ٤,٢ | ١٧,٦٤ |
| ١٠ - ٩ = ١ | ١ | - ١,١ | ١,٢١ | ١١,١ - ٩ = ٢,١ | ٤,٤١ |
| المجموع صفر | ٤٦ | صفر | ١,٩٠ | صفر | ٤٤,١٠ |

التفاوت غير المفسر ( $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \hat{\text{ص}}_{\text{ر}})^2$ ) +

التفاوت المفسر ( $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\hat{\text{ص}}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^2$ )

= ١,٩ + ٤٤,١ = ٤٦ وهو نفس مجموع الاختلاف الكلي ( $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^2$ )

**تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي العام:**

لقد سبق أن درسنا، في الانحدار الخطي البسيط، العلاقة بين المتغير التابع ومتغير واحد مستقل. وإذا زاد عدد المتغيرات المستقلة عن واحد فإننا نكون بصدد النموذج الخطي العام المعطى بالمعادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٦)، أي أننا نستخدم أكثر من متغير واحد مستقل للتنبوء بقيمة المتغير التابع. فإذا فرضنا أن حجم المبيعات من سلعة معينة يعتمد على سعر هذه السلعة وتنبأ البائع، اعتماداً على ذلك، بحجم مبيعاته من هذه السلعة فقد يجد مثلاً أن ٧٠٪ من التباين في حجم المبيعات يمكن تفسيره بالسعر وفي هذه الحالة فإنه يبحث عن متغير أو متغيرات أخرى لا يرتبط بقوة بالمتغير الأول لكي يتمكن من تفسير جزء أكبر من التباين في حجم المبيعات، أما إذا كان المتغير الجديد مرتبطاً بقوة بسعر السلعة فإن إضافته لا تفسر جزءاً أكبر من التباين ويسمى هذا النوع من الارتباط في الاحصاء أو الاقتصاد القياسي بالارتباط الداخلي Intercorrelation بين المتغيرات المستقلة كما يشار إليه أيضاً بالتعبير Collinearity.

وهناك بعض الحالات التي لا يكون فيها النموذج Additive بمعنى أن نسبة من التباين التي يفسرها متغير مستقل بوجود متغير آخر يعزى الى مايسمى بالتفاعل

المزدوج Interaction والتي يجب أن تؤخذ في الاعتبار أثناء اختيار النموذج المناسب.

وإذا اعتبرنا النموذج (٢٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$ت\,(ص) = أ_{١}\, س_{١} + أ_{٢}\, س_{٢} + \ldots + أ_{و}\, س_{و} \qquad (٤٦ - ٢ - ٦)$$

$$تبا\,(ص) = \sigma^{٢} \qquad (٤٧ - ٢ - ٦)$$

وبالتالي إذا كانت خ تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين $\sigma^{٢}$ فإن ص تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع $أ_{١}\, س_{١} + أ_{٢}\, س_{٢} + \ldots + أ_{و}\, س_{و}$ وتباين $\sigma^{٢}$.

وإذا كانت لدينا عينة عشوائية حجمها ن من المشاهدات المستقلة $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، . . . ، $ص_{ن}$ فإن:

$$ص_{ر} = أ_{١}\, س_{ر١} + أ_{٢}\, س_{ر٢} + \ldots + أ_{و}\, س_{رو} + خ_{ر} \qquad ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن$$

$$(٤٨ - ٢ - ٦)$$

أي أن

$$\left.\begin{array}{l} ص_{١} = أ_{١}\, س_{١١} + أ_{٢}\, س_{٢١} + \ldots\ أ_{و}\, س_{١و} + خ_{١} \\ ص_{٢} = أ_{١}\, س_{١٢} + أ_{٢}\, س_{٢٢} + \ldots\ أ_{و}\, س_{٢و} + خ_{٢} \\ \vdots \\ ص_{ن} = أ_{١}\, س_{ن١} + أ_{٢}\, س_{ن٢} + \ldots + أ_{و}\, س_{نو} + خ_{ن} \end{array}\right] \qquad (٤٩ - ٢ - ٦)$$

ونعبّر عن هذه المجموعة من المعادلات الآنية باستخدام المصفوفات لتسهيل عملية التفاضل وبالتالي تقدير المعالم $أ_{١}$، $أ_{٢}$، . . . $أ_{و}$

$$\underline{ص} = \begin{bmatrix} ص_{١} \\ ص_{٢} \\ \vdots \\ ص_{ن} \end{bmatrix} \qquad \underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١} \\ أ_{٢} \\ \vdots \\ أ_{و} \end{bmatrix} \qquad \underline{خ} = \begin{bmatrix} خ_{١} \\ خ_{٢} \\ \vdots \\ خ_{ن} \end{bmatrix}$$

$$س = \begin{bmatrix} س_{١١} & س_{٢١} & \cdots\cdots & س_{١و} \\ س_{١٢} & س_{٢٢} & \cdots\cdots & س_{٢و} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ س_{ن١} & س_{ن٢} & \cdots\cdots & س_{نو} \end{bmatrix}$$

$$\text{س}' = \begin{bmatrix} \text{س}_{11} & \text{س}_{12} & \cdots\cdots & \text{س}_{1\text{ن}} \\ \text{س}_{21} & \text{س}_{22} & \cdots\cdots & \text{س}_{2\text{ن}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{س}_{1\text{و}} & \text{س}_{2\text{و}} & \cdots\cdots & \text{س}_{\text{ن}\text{و}} \end{bmatrix}$$

$$\text{س}'\text{س} = \begin{bmatrix} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}1}^{2} & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}1}\,\text{س}_{\text{ر}2} & \cdots & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}1}\,\text{س}_{\text{ر}\text{و}} \\ \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}2}\,\text{س}_{\text{ر}1} & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}2}^{2} & \cdots & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}2}\,\text{س}_{\text{ر}\text{و}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}\text{و}}\,\text{س}_{\text{ر}1} & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}\text{و}}\,\text{س}_{\text{ر}2} & \cdots & \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}\text{و}}^{2} \end{bmatrix}$$

وحيثما يزول الالتباس في فهم دليل التجميع فإننا نكتب هذه المصفوفة على النحو التالي:

$$\text{س}'\text{س} = \begin{bmatrix} \text{مجـ}\ \text{س}_{1}^{2} & \text{مجـ}\ \text{س}_{1}\,\text{س}_{2} & \cdots & \text{مجـ}\ \text{س}_{1}\,\text{س}_{\text{و}} \\ \text{مجـ}\ \text{س}_{2}\,\text{س}_{1} & \text{مجـ}\ \text{س}_{2}^{2} & \cdots & \text{مجـ}\ \text{س}_{2}\,\text{س}_{\text{و}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{مجـ}\ \text{س}_{\text{و}}\,\text{س}_{1} & \text{مجـ}\ \text{س}_{\text{و}}\,\text{س}_{2} & \cdots & \text{مجـ}\ \text{س}_{\text{و}}^{2} \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة مربعة ترتيبها و × و، ومحددها لا يساوي صفراً، أي أن $|\text{س}'\text{س}| \neq$ صفر وبالتالي فإنه يمكن حساب مقلوب هذه المصفوفة Inverse of the Matrix والذي نستخدمه في تقدير معالم النموذج الخطي العام كما سيأتي مباشرة.

بعد ذلك يمكن إعادة كتابة (٤٩ ـ ٢ ـ ٦) على النحو التالي:

$$\underline{\text{ص}} = \text{س}\,\underline{\text{أ}} + \underline{\text{خ}} \qquad (٥٠ ـ ٢ ـ ٦)$$

كما سبق أن درسنا في تقدير معالم النموذج الخطي البسيط فإن المطلوب هو تقدير المعالم $\text{أ}_1$، $\text{أ}_2$، . . . ، $\text{أ}_{\text{و}}$ بحيث يكون مجموع مربعات الأخطاء أقل ما يمكن

(أي أن $خ_1^2 + خ_2^2 + \ldots + خ_ن^2$ نهاية صغرى).

من المعادلة (٥٠ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

$$\underline{خ} = \underline{ص} - س\,\underline{أ}$$

ومجموع مربعات الأخطاء هو:

$$\underline{خ}'\,\underline{خ} = خ_1^2 + خ_2^2 + \ldots + خ_ن^2$$

$$= (\underline{ص} - س\,\underline{أ})'\,(\underline{ص} - س\,\underline{أ})$$

$$= \underline{ص}'\,\underline{ص} - \underline{ص}'\,س\,\underline{أ} - \underline{أ}'\,س'\,\underline{ص} + \underline{أ}'\,س'\,س\,\underline{أ} \qquad (٥١ - ٢ - ٦)$$

وحيث أن $\underline{ص}'\,س\,\underline{أ} = \underline{أ}'\,س'\,\underline{ص}$ لأن كلا منهما يساوي عدداً Scalar Quantity فإنه يمكن كتابة (٥١ ـ ٢ ـ ٦) كما يلي:

$$د\,(\underline{أ}) = \underline{خ}'\,\underline{خ} = \underline{ص}'\,\underline{ص} - ٢\,\underline{أ}'\,س'\,\underline{ص} + \underline{أ}'\,س'\,س\,\underline{أ} \qquad (٥٢ - ٢ - د)$$

وبإيجاد المشتقات الجزئية للدالة د (أ) في المعادلة (٥٢ ـ ٢ ـ ٦) بالنسبة إلى المعالم $أ_1$ ، $أ_2$ ، ... ، $أ_ر$ ومساواة هذه المشتقات الجزئية بالصفر نجد أن:

$$صفر - ٢\,س'\,\underline{ص} + ٢\,س'\,س\,\underline{\hat{أ}} = صفر$$

أي أن:

$$س'\,س\,\underline{\hat{أ}} = س'\,\underline{ص} \qquad (٥٣ - ٢ - ٦)$$

وبضرب طرفي المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٦) ضرباً قبلياً Pre-Multiplication بالمقدار $(س'\,س)^{-1}$ فإن:

$$(س'\,س)^{-1}\,س'\,س\,\underline{\hat{أ}} = (س'\,س)^{-1}\,س'\,\underline{ص}$$

وحيث أن $(س'\,س)^{-1}\,س'\,س = I$ مصفوفة الوحدة فإن متجه مقدرات المربعات الصغرى للمعالم $أ_1$ ، $أ_2$ ، ... ، $أ_ر$ هو:

$$\underline{\hat{أ}} = (س'\,س)^{-1}\,س'\,\underline{ص} \qquad (٥٤ - ٢ - ٦)$$

القيمة المتوقعة والتباين لمتجه المقدرات $\underline{\hat{أ}}$ :

$$ت\,(\underline{\hat{أ}}) = ت\,((س'\,س)^{-1}\,س'\,\underline{ص})$$

$$= ت\,((س'\,س)^{-1}\,س'\,(س\,\underline{أ} + \underline{خ}))$$

$$= ت\,(\underline{أ} + (س'\,س)^{-1}\,س'\,\underline{خ})$$

$= \underline{أ} + (س' س)^{-1} س' ت (\underline{خ})$

$= أ،$ لأن ت (خ) = صفر $\qquad (٥٥ - ٢ - ٦)$

أي أن $\hat{\underline{أ}}$ مقدّر غير متحيز لمتجه المعالم $\underline{أ}$.

$تبا (\hat{\underline{أ}}) = ت (\hat{\underline{أ}} - \underline{أ}) (\hat{\underline{أ}} - \underline{أ})' \qquad (٥٦ - ٢ - ٦)$

$$= ت \begin{bmatrix} (\hat{أ}_١ - أ_١)^٢ & (\hat{أ}_١ - أ_١)(\hat{أ}_٢ - أ_٢) & (\hat{أ}_١ - أ_١)(\hat{أ}_و - أ_و) \\ (\hat{أ}_٢ - أ_٢)(\hat{أ}_١ - أ_١) & (\hat{أ}_٢ - أ_٢)^٢ & (\hat{أ}_٢ - أ_٢)(\hat{أ}_و - أ_و) \\ (\hat{أ}_و - أ_و)(\hat{أ}_١ - أ_١) & (\hat{أ}_و - أ_و)(\hat{أ}_٢ - أ_٢) & (\hat{أ}_و - أ_و)^٢ \end{bmatrix}$$

وإذا أخذنا القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر هذه المصفوفة فإنه ينتج لدينا مصفوفة جديدة تمثل العناصر التي على قطرها تباينات المقدّرات $\hat{أ}_١$ ، $\hat{أ}_٢$ ، . . . ، $\hat{أ}_و$ والعناصر التي حول هذا القطر تمثل التغاير بين هذه المقدّرات. ويمكن التعبير عن هذه المصفوفة باستخدام (٥٦ - ٢ - ٦) على النحو التالي:

$تبا (\hat{\underline{أ}}) = ت((س' س)^{-1} س' \underline{ص} - \underline{أ}) ((س' س)^{-1} س' \underline{ص} - \underline{أ})'$

$= ت (((س' س)^{-1} س' (س \underline{أ} + \underline{خ}) - \underline{أ}) ((س' س)^{-1} س' (س \underline{أ} + \underline{خ}) - \underline{أ}))'$

$= ت (((س' س)^{-1} س' س \underline{أ} + (س' س)^{-1} س' \underline{خ} - \underline{أ})((س' س)^{-1} س' س \underline{أ} + (س' س)^{-1} س' \underline{خ} - \underline{أ})')$

$= ت (((س' س)^{-1} س' \underline{خ}) ((س' س)^{-1} س' \underline{خ})')$

$= ت ((س' س)^{-1} س' \underline{خ} \underline{خ}' س (س' س)^{-1})$

$= (س' س)^{-1} س' ت (\underline{خ} \underline{خ}') س (س' س)^{-1}$

$= \sigma^٢ (س' س)^{-1} س' س (س' س)^{-1}$

$= \sigma^٢ (س' س)^{-1} \qquad (٥٧ - ٢ - د)$

حيث أن تباين $\hat{أ}_١$ هو العنصر الأول على القطر الرئيسي وتباين $\hat{أ}_٢$ هو العنصر الثاني على القطر الرئيسي وهكذا.

ويمكن إثبات أن مقدرات المربعات الصغرى لها تباين أقل من تباين أي مقدّر آخر غير متحيز وخطي في المتغير التابع ص.

### توزيعات المعاينة للمقدرات $\hat{أ}_ر$ :

إذا كان تباين النموذج الخطي العام ($\sigma^2$) معلوماً فإن $\hat{أ}_ر$ لها توزيع طبيعي بتوقع $أ_ر$ وتباين $\sigma^2$ ($\hat{أ}_ر$) وهو العنصر ر على القطر الرئيسي لمصفوفة التباينات المعطاة بالمعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ د)، أما إذا كان التباين $\sigma^2$ غير معلوم فإننا نقدره بـ MSE وبالتالي فإن $\hat{أ}_ر$ تتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن − و). وسوف نستخدم هذه التوزيعات العينيّة في تكوين فترات الثقة لمعالم النموذج الخطي العام $أ_ر$ وفي اختبارات الفروض المتعلقة بهذه المعالم. أما إذا أرنا تكوين فترات ثقة مشتركة لهذه المعالم فإننا نستخدم طريقة بونفيروني كما سيأتي فيما بعد.

### توزيع المعاينة للقيمة الاتجاهية للمتغير التابع عند مستوى محدّد للمتغيرات المستقلة:

القيمة الاتجاهية للمتغير التابع عند مستوى محدّد للمتغيرات المستقلة $\underline{س}_م$ نرمز لها بالرمز $\hat{ص}_م$ وتعطى كما يلي:

$$\hat{ص}_م = \underline{س}'_م \underline{\hat{أ}} \qquad (٦ - ٢ - ٥٨)$$

والقيمة المتوقعة والتباين لهذا المقدر هما:

$$ت\ (\hat{ص}_م) = ت\ (\underline{س}'_م \underline{\hat{أ}}) = \underline{س}'_م \underline{أ} = \mu\ (\hat{ص}_م) \qquad (٦ - ٢ - ٥٩)$$

$$تبا\ (\hat{ص}_م) = \sigma^2\ \underline{س}'_م\ (س'\ س)^{-1}\ \underline{س}_م \qquad (٦ - ٢ - ٦٠)$$

فإذا كانت $\sigma^2$ معلومة فإن $\hat{ص}_م$ تتبع التوزيع الطبيعي بتوقع كما هو مبين في (٥٩ ـ ٢ ـ ٦) وتباين كما هو مبين في (٦٠ ـ ٢ ـ ٦). أما إذا كانت $\sigma^2$ غير معلومة فإن $\hat{ص}_م$ تتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن − و)

### تحليل التباين في النموذج الخطي العام:

### Analysis of Variance in the General Linear Model:

يمكن تجزئة التفاوت الكلي في المتغير التابع ص إلى اختلاف مفسّر Explained Variation أو مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار Regression Sum of Squares (SSR) واختلاف غير مفسر Unexplained Variation أو مجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية Error Sum of Squares (SSE) كما يلي:

$$\underline{ص}'\ \underline{ص} - ن\ \bar{ص}^2 = (\underline{\hat{أ}}'\ س'\ \underline{ص} - ن\ \bar{ص}^2) + (\underline{ص}'\ \underline{ص} - \underline{\hat{أ}}'\ س'\ \underline{ص}) \qquad (٦ - ٢ - ٦١)$$

حيث الحد الأول في الطرف الأيسر من (٦١ ـ ٢ ـ ٦) يسمى الاختلاف المفسر والحد الثاني يسمى الاختلاف غير المفسر.

**تمرين توضيحي ٢:**

إذا كان لدينا النموذج الخطي العام التالي:

$$ص_ر = أ_٠ + أ_١ س_{١ر} + أ_٢ س_{٢ر} + خ_ر$$

بنفس الفرضيات المحددة في النموذج (٢٥ ـ ٢ ـ ٦)، وأعطيت لنا بيانات على هذا النموذج حصلنا منها على النتائج التالية:

$$ن = ١٦$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ص_ر = ٨٠$$

$$\sum_{ر=١}^{ن} ص^٢_ر = ٦٥٤٠$$

$$(س' س) = \begin{bmatrix} ١٦ & ٨ & ٤ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} \quad ، \quad س' \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٢٠ \\ ٤٠ \end{bmatrix}$$

$$(س' س)^{-١} = \begin{bmatrix} ٠,٢٠ & -٠,٢٥ & -٠,٠٥ \\ -٠,٢٥ & ٠,٥٠ & صفر \\ -٠,٠٥ & صفر & ٠,٢٠ \end{bmatrix}$$

فإنه باستخدام المعادلة (٥٤ ـ ٢ ـ ٦):

$$\underline{\hat{أ}} = \begin{bmatrix} ٠,٢٠ & -٠,٢٥ & -٠,٠٥ \\ -٠,٢٥ & ٠,٥٠ & صفر \\ -٠,٠٥ & صفر & ٠,٢٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٢٠ \\ ٤٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١٦ \\ ٤٠ \\ ٤ \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$\hat{ص}_ر = -١٦ + ٤٠ س_{١ر} + ٤ س_{٢ر}$$

وإذا فرضنا أن:

$س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ٥$ فإنه بالتعويض في (٥٨ ـ ٢ ـ ٦)

$$\hat{ص}_د = -١٦ + ٤٠ × ٣ + ٤ × ٥ = -١٦ + ١٢٠ + ٢٠ = ١٢٤$$

ويمكن ايجاد مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار (الاختلاف المفسر) ومجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية (الاختلاف غير المفسر) باستخدام (٦١ ـ ٢ - ٦) كما يلي:

$$\text{الاختلاف المفسر} = (-١٦ \quad ٤٠ \quad ٤) \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٢٠ \\ ٤٠ \end{bmatrix} - ١٦ \times \left(\frac{٨٠}{١٦}\right)^٢$$

$$= ٣٦٨٠ - ٤٠٠ = ٣٢٨٠$$

الاختلاف غير المفسّر = ٦٥٤٠ - ٣٦٨٠ = ٢٨٦٠

أما الاختلاف أو التفاوت الكلي باستخدام نفس المعادلة (٦١ ـ ٢ ـ ٦) فهو:

$$٦٥٤٠ - ١٦ \left(\frac{٨٠}{١٦}\right)^٢ = ٦٥٤٠ - ٤٠٠ = ٦١٤٠$$

وهو يساوي بدوره مجموع الإختلافين المفسّر وغير المفسّر.

## الانحـــدار غير الخطي Curvilinear Regression

بعد أن انتهينا من تحليل النموذج الخطي العام فإنه من المفيد أن ندرس بعض نماذج الإنحدار غير الخطي وأن نوضح كيفية تحويلها إلى نماذج خطية وبالتالي تقدير ثوابتها بطريقة المربعات الصغرى.

### أولاً: الإنحدار غير الخطي المسمّى Polynomial Regression

يمكن أن يحتوي هذا النوع من النماذج على متغير واحد مستقل أو أكثر وسوف نركز اهتمامنا على النماذج التي تحتوي على متغير واحد فقط. فمثلاً النموذج

$$ص = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + خ$$

يسمى نموذج بمتغير واحد مستقل من الدرجة الثانية، وتقدر معالم (ثوابت) هذا النموذج بطريقة المربعات الصغرى على النحو التالي:

مجموع مربعات الأخطاء هو

$$ط = \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢$$

$$= \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - أ_٠ - أ_١ س_ر - أ_٢ س_ر^٢)^٢$$

وبمفاضلة ط جزئياً بالنسبة إلى $أ_{.}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ فإن

$$\frac{\partial ط}{\partial أ_{.}} = -٢ \sum_{ر=١}^{ن} (ص_ر - أ_{.} - أ_{١}س_ر - أ_{٢}\, س_ر^{٢})$$

$$\frac{\partial ط}{\partial أ_{١}} = -٢ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر\, (ص_ر - أ_{.} - أ_{١}س_ر - أ_{٢}س_ر^{٢})$$

$$\frac{\partial ط}{\partial أ_{٢}} = -٢ \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^{٢}\, (ص_ر - أ_{.} - أ_{١}س_ر - أ_{٢}س_ر^{٢})$$

وبمساواة $\frac{\partial ط}{\partial أ_{.}}$ ، $\frac{\partial ط}{\partial أ_{١}}$ ، $\frac{\partial ط}{\partial أ_{٢}}$ بالصفر فإننا نحصل على مجموعة المعادلات التالية

$$\text{مجـ ص} = ن\,\hat{أ}_{.} + \hat{أ}_{١}\,\text{مجـ س} + \hat{أ}_{٢}\,\text{مجـ س}^{٢}$$

$$\text{مجـ س ص} = \hat{أ}_{.}\,\text{مجـ س} + \hat{أ}_{١}\,\text{مجـ س}^{٢} + \hat{أ}_{٢}\,\text{مجـ س}^{٣}$$

$$\text{مجـ س}^{٢}\text{ ص} = \hat{أ}_{.}\,\text{مجـ س}^{٢} + \hat{أ}_{١}\,\text{مجـ س}^{٣} + \hat{أ}_{٢}\,\text{مجـ س}^{٤}$$

ويمكن استخدام المصفوفات في التعبير عن هذه المعادلات باستخدام المعادلة (٥٣ - ٢ - ٦)، أي أن

$$س'\,\underline{ص} = س'\,س\,\underline{\hat{أ}}$$

حيث

$$س = \begin{bmatrix} ١ & س_{١} & س_{١}^{٢} \\ ١ & س_{٢} & س_{٢}^{٢} \\ \vdots & & \\ ١ & س_{ن} & س_{ن}^{٢} \end{bmatrix} ،\quad س'س = \begin{bmatrix} ن & \text{مجـ س} & \text{مجـ س}^{٢} \\ \text{مجـ س} & \text{مجـ س}^{٢} & \text{مجـ س}^{٣} \\ \text{مجـ س}^{٢} & \text{مجـ س}^{٣} & \text{مجـ س}^{٤} \end{bmatrix}$$

$$\underline{ص} = \begin{bmatrix} ص_{١} \\ ص_{٢} \\ \vdots \\ ص_{ن} \end{bmatrix} ،\quad \underline{\hat{أ}} = \begin{bmatrix} \hat{أ}_{.} \\ \hat{أ}_{١} \\ \hat{أ}_{٢} \end{bmatrix}$$

أما إذا كان لدينا نموذج بمتغير واحد مستقل من الدرجة الثالثة:

$$ص = أ_{.} + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + خ$$

فإنه باتباع الخطوات السابقة نجد أيضاً باستخدام (٥٣ ـ ٢ ـ ٦) أن

$$س' \underline{ص} = س' س \underline{\hat{أ}}$$

حيث

$$س = \begin{bmatrix} ١ & س_١ & س_١^٢ & س_١^٣ \\ ١ & س_٢ & س_٢^٢ & س_٢^٣ \\ \vdots \\ ١ & س_ن & س_ن^٢ & س_ن^٣ \end{bmatrix} ، س'س = \begin{bmatrix} ن & مجـ س & مجـ س^٢ & مجـ س^٣ \\ مجـ س & مجـ س^٢ & مجـ س^٣ & مجـ س^٤ \\ مجـ س^٢ & مجـ س^٣ & مجـ س^٤ & مجـ س^٥ \\ مجـ س^٣ & مجـ س^٤ & مجـ س^٥ & مجـ س^٦ \end{bmatrix}$$

$$\underline{ص} = \begin{bmatrix} ص_١ \\ ص_٢ \\ \vdots \\ ص_ن \end{bmatrix} ، \underline{\hat{أ}} = \begin{bmatrix} \hat{أ}_. \\ \hat{أ}_١ \\ \hat{أ}_٢ \\ \hat{أ}_٣ \end{bmatrix}$$

وبشكل عام إذا كان لدينا نموذج بمتغير واحد مستقل من الدرجة م

ص = $أ_. + أ_١ س + \ldots\ldots + أ_م س^م$ فإنه باستخدام (٥٣ ـ ٢ ـ ٦):

$$س' \underline{ص} = س' س \underline{\hat{أ}}$$

حيث

$$س = \begin{bmatrix} ١ & س_١ & س_١^٢ & \ldots & س_١^م \\ ١ & س_٢ & س_٢^٢ & \ldots & س_٢^م \\ \vdots \\ ١ & س_ن & س_ن^٢ & \ldots & س_ن^م \end{bmatrix}$$

$$س' س = \begin{bmatrix} ن & مجـ س & مجـ س^٢ & \ldots\ldots & مجـ س^م \\ مجـ س & مجـ س^٢ & مجـ س^٣ & \ldots\ldots & مجـ س^{م+١} \\ \vdots \\ مجـ س^م & مجـ س^{م+١} & مجـ س^{م+٢} & \ldots\ldots & مجـ س^{٢م} \end{bmatrix}$$

$$\underline{ص} = \begin{bmatrix} ص_١ \\ ص_٢ \\ \vdots \\ ص_ن \end{bmatrix} ، \underline{\hat{أ}} = \begin{bmatrix} \hat{أ}_. \\ \hat{أ}_١ \\ \vdots \\ \hat{أ}_م \end{bmatrix}$$

والمصفوفة س′س مربعة ومحددها لا يساوي صفراً وبالتالي فإنه يمكن حساب مقلوب لهذه المصفوفة $(س′س)^{-1}$ وإذا ضربنا المعادلة س′ص = س′س أ̂ ضرباً قبلياً Pre-Multiplication

بـ $(س′س)^{-1}$ نجد أن

أ̂ = $(س′س)^{-1}$ س′ص

وهي نفس النتيجة المبينة بالمعادلة (٥٤ ـ ٢ ـ ٦)

**تمرين توضيحي**

إذا كان لدينا البيانات التالية

| س | ص |
|---|---|
| صفر | ٥٠٨,١ |
| صفر | ٤٩٨,٤ |
| ١ | ٥٦٨,٢ |
| ١ | ٥٧٧,٣ |
| ٢ | ٦٥١,٧ |
| ٢ | ٦٥٧,٠ |
| ٤ | ٧٥٥,٣ |
| ٤ | ٧٥٨,٩ |
| ٥ | ٧٨٧,٦ |
| ٥ | ٧٩٢,١ |
| ٦ | ٨٤١,٤ |
| ٦ | ٨٣١,٨ |
| ٧ | ٨٥٤,٧ |
| ٧ | ٨٧١,٤ |
| | ٩٩٥٣,٩ |

والمطلوب هو توفيق النموذج ص = $أ_.$ + $أ_1$س + $أ_2$$س^2$ + خ بطريقة المربعات الصغرى (يستدل على ذلك عندما يرسم شكل الإنتشار للنقط ($س_ر$، $ص_ر$) ويظهر من انتشارها أن العلاقة بين المتغيرين يمكن تمثيلها بعلاقة من الدرجة الثانية أو الثالثة

أو أعلى من ذلك أو علاقة لوغاريتمية أو غير ذلك).

س =

| | س | س٢ |
|---|---|---|
| ١ | صفر | صفر |
| ١ | صفر | صفر |
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ١ | ١ |
| ١ | ٢ | ٤ |
| ١ | ٢ | ٤ |
| ١ | ٤ | ١٦ |
| ١ | ٤ | ١٦ |
| ١ | ٥ | ٢٥ |
| ١ | ٥ | ٢٥ |
| ١ | ٦ | ٣٦ |
| ١ | ٦ | ٣٦ |
| ١ | ٧ | ٤٩ |
| ١ | ٧ | ٤٩ |

، ص =

| |
|---|
| ٥٠٨,١ |
| ٤٩٨,٤ |
| ٥٦٨,٢ |
| ٥٧٧,٣ |
| ٦٥١,٧ |
| ٦٥٧,٠ |
| ٧٥٥,٣ |
| ٧٥٨,٩ |
| ٧٨٧,٦ |
| ٧٩٢,١ |
| ٨٤١,٤ |
| ٨٣١,٨ |
| ٨٥٤,٧ |
| ٨٧١,٤ |

أ =

| |
|---|
| أ٠ |
| أ١ |
| أ٢ |

س′س =

| | | |
|---|---|---|
| ١٤ | ٥٠ | ٢٦٢ |
| ٥٠ | ٢٦٢ | ١٥١٤ |
| ٢٦٢ | ١٥١٤ | ٨٩٣٤ |

وقد وجد أن

(س′س)$^{-1}$ =

| | | |
|---|---|---|
| ٠,٣٥٥٣٧١٩٠ | ٠,١٩٣١٨١٨٢- | ٠,٠٢١٦٩٤٢١ |
| ٠,١٩٣١٨١٨٢- | ٠,١٨٤٥٢٣٨١ | ٠,٠٢٤٨٩١٧٧- |
| ٠,٠٢١٦٩٤٢١ | ٠,٠٢٤٨٩١٧٧- | ٠,٠٠٣٥٩١١١ |

وبالتعويض في (٥٤ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$\hat{أ}_{.}$ = ٥٠٣,٣٤٦

$\hat{أ}_{١}$ = ٧٨,٩٤١

$\hat{أ}_{٢}$ = -٣,٩٦٩

ومعادلة الإنحدار الممهدة هي

ص = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١ س - ٣,٩٦٩ $س^{٢}$

وإذا عوضنا بقيم المتغير المستقل س في هذه المعادلة نجد أن

$\hat{ص}$ (س= صفر) = ٥٠٣,٣٤٦

$\hat{ص}$ (س = ١) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١ - ٣,٩٦٩

= ٥٧٨,٣١٨

$\hat{ص}$ (س = ٢) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١(٢) - ٣,٩٦٩($٢^{٢}$)

= ٦٤٥,٣٥٢

$\hat{ص}$ (س = ٤) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١(٤) - ٣,٩٦٩($٤^{٢}$)

= ٧٥٥,٦٠٦

$\hat{ص}$ (س = ٥) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١(٥) - ٣,٩٦٩($٥^{٢}$)

= ٧٩٨,٨٢٦

$\hat{ص}$ (س = ٦) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١(٦) - ٣,٩٦٩($٦^{٢}$)

= ٨٣٤,١٠٨

$\hat{ص}$ (س = ٧) = ٥٠٣,٣٤٦ + ٧٨,٩٤١(٧) - ٣,٩٦٩($٧^{٢}$)

= ٨٦١,٤٥٢

وبالتالي فإن التفاوت غير المفسّر (التفاوت الذي يعزي للعوامل العشوائية SSE) هو:

$\sum_{ر=١}^{ن}$ ($ص_{ر}$ - $\hat{ص}_{ر}$)$^{٢}$ = (٥٠٨,١ - ٥٠٣,٣٤٦)$^{٢}$ + .... + (٨٧١,٤ - ٨٦١,٤٥٢)$^{٢}$ = ٧١١,٧

وحيث أن $\bar{ص}$ = $\frac{٩٩٥٣,٩}{١٤}$ = ٧١٠,٩٩٣

فإن التفاوت المفسر (التفاوت الذي يعزي للإنحدار SSR)

هــو

$$\sum_{ر=1}^{ن} (\hat{ص}_ر - \bar{ص})^2 = (٥٠٣,٣٤٦ - ٧١٠,٩٩٣)^2 + ... + (٨٦١,٤٥٢ - ٧١٠,٩٩٣)^2$$

$$= ٢٢٥٠٣١,٨$$

والتفاوت الكلي SSTO هو

$$\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \bar{ص}) = (٥٠٨,١ - ٧١٠,٩٩٣)^2 + .... (٨٧١,٤ - ٧١٠,٩٩٣)^2$$

$$= ٢٢٥٧٤٣,٥$$

وبالتالي فإنه يمكن تكوين جدول أساسي التحليل التباين على النحو التالي:

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| الانحدار | ٢٢٥٠٣١,٨ | ٢ | ١١٢٥١٥,٩ | ١٧٣٩,٠٤ |
| الخطأ | ٧١١,٧ | ١١ | ٦٤,٧ | |
| الكلـي | ٢٢٥٧٤٣,٥ | ١٣ | | |

ومعامل التحديد $ر^2$ هــو

$$ر^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{٢٢٥٠٣١,٨}{٢٢٥٧٤٣,٥} = ٠,٩٩٦٨٥$$

إن كل مستوى للمتغير س يقابله مشاهدتان للمتغير التـابع ص، ولذا فإنه يمكن اختبار مدى تمثيل النموذج للعلاقة بين س،ص Aptness of the Model

على النحو التالي:

$H_0$ : ت(ص) = أ. + أ١س − أ٢س٢

$H_1$ : ت(ص) ≠ أ. + أ١س + أ٢س٢

التفاوت الذي يعزي للعوامل العشوائية فقط Pure Error Sum of Squares SSPE

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \bar{ص}_ر)^2$$

حيث $\overline{ص_ر}$ عبارة عن متوسط المشـاهدتـين للمتغير ص عن المستـوى ر للمتغير س (سر)، أي أن:

$$\overline{ص_١} = \frac{٥٠٨,١ + ٤٩٨,٤}{٢} = ٥٠٣,٢٥ = \overline{ص_٢}$$

$$\overline{ص_٣} = \frac{٥٦٨,٢ + ٥٧٧,٣}{٢} = ٥٧٢,٧٥ = \overline{ص_٤}$$

$$\overline{ص_{١٣}} = \frac{٨٥٤,٧ + ٨٧١,٤}{٢} = ٨٦٣,٠٥ = \overline{ص_{١٤}}$$

وبالتالي فإن

$$SSPE = (٥٠٨,١ - ٥٠٣,٢٥)^٢ + (٤٩٨,٤ - ٥٠٣,٢٥)^٢ + \ldots\ldots +$$
$$(٨٥٤,٧ - ٨٦٣٠٥)^٢ + (٨٧١,٤ - ٨٦٣,٠٥)^٢$$
$$= ٣٠٤,٦$$

ومقدار التفاوت الذي يعزي لعدم مطابقـة النموذج للبيـانات المعـطاة Lack of Fit Sum of Squares (SSLF)

هو كما يلي:

$$SSLF = SSE - SSPE$$
$$= ٧١١,٧ - ٣٠٤,٦$$
$$= ٤٠٧,١$$

وجدول تحليل التباين في هذه الحالة هو

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| الانحدار | ٢٢٥٠٣١,٨ | ٢ | ١١٢٥١٥,٩ | |
| عدم المطابقة | ٤٠٧,١ | ٤ | ١٠١,٨ | ٢,٣٤ |
| العشوائية فقط | ٣٠٤,٦ | ٧ | ٤٣,٥ | |
| الكلي | ٢٢٥٧٤٣,٥ | ١٣ | | |

**ثانياً: العلاقة الهندسية Geometric Relationship**

$$ص = أ\ س^{ب}$$

نوفق هذا النموذج بتحويله إلى نموذج خطي بسيط بواسطة اللوغاريتمات على النحو التالي ونستخدم بعد ذلك طريقة المربعات الصغرى لتقدير الثوابت أ، ب:

لو ص = لو أ + ب لو س

أي أننا نحسب لوغاريتمات قيم المتغيرين المستقل س والتابع ص وإذا وضعنا لو س = س′ ، لو ص = ص′

لو أ = أ′ فإن النموذج يؤول إلى

ص′ = أ′ + ب س′

مثال:

الجدول التالي يبين الدخل السنوي (س) بالدينار لـ ١٤ أسرة ومقدار الإنفاق (ص) بالدينار، على سلعة معينة. والمطلوب هو توفيق النموذج ص = أسب لهذه البيانات

| دخل الأسرة السنوي (س) بالدينار | مقدار الانفاق (ص) على سلعة معينة بالدينار | س′ = لو س | ص′ = لو ص |
|---|---|---|---|
| ٦٨٨ | ٢,٥ | ٢,٨٣٧٦ | ٠,٣٩٧٩ |
| ٨٨٢ | ١,٩ | ٢,٩٤٥٥ | ٠,٢٧٨٨ |
| ١١٣٦ | ٣,٣ | ٣,٠٥٥٤ | ٠,٥١٨٥ |
| ١٣٩٧ | ٢,٩ | ٣,١١٥٢ | ٠,٤٦٢٤ |
| ١٦٤٩ | ٤,١ | ٣,٢١٧٢ | ٠,٦١٢٨ |
| ١٨٨٢ | ٨,٢ | ٣,٢٧٤٦ | ٠,٩١٣٨ |
| ٢١٣٨ | ٧,٧ | ٣,٣٣٠٠ | ٠,٨٨٦٥ |
| ٢٣٣٨ | ٧,٣ | ٣,٣٧٨٠ | ٠,٨٦٣٣ |
| ٢٧٢٨ | ٧,٤ | ٣,٤٣٥٨ | ٠,٨٦٩٢ |
| ٣٢٢٤ | ١٣,٢ | ٣,٥٠٨٤ | ١,١٢٠٦ |
| ٣٧٧٢ | ١٩,٤ | ٣,٥٧٦٦ | ١,٢٨٧٨ |
| ٤٤٦٥ | ٢٦,٥ | ٣,٦٤٩٨ | ١,٤٢٣٣ |
| ٥٩٠٩ | ٥٢,٥ | ٣,٧٧١٥ | ١,٧٢٠٢ |
| ١١٠٦٧ | ٨٥,٦ | ٤,٠٤٤٠ | ١,٩٣٢٥ |
| المجموع | | ٤٧,١٣٩٦ | ١٣,١٢٨٥ |

| س'ص' | س'^٢ |
| --- | --- |
| ١,١٢٩١ | ٨,٠٥٢٠ |
| ٠,٨٢١٢ | ٨,٦٧٥٠ |
| ١,٥٨٤٢ | ٩,٣٣٥٥ |
| ١,٤٤٠٥ | ٩,٧٠٤٥ |
| ١,٩٧١٥ | ١٠,٣٥٠٤ |
| ٢,٩٩٢٣ | ١٠,٧٢٣٠ |
| ٢,٩٥٢١ | ١١,٠٨٨٩ |
| ٢,٩١٦٢ | ١١,٤١٠٩ |
| ٢,٩٨٦٤ | ١١,٨٠٤٧ |
| ٢,٩٣١٥ | ١٢,٣٠٨٩ |
| ٤,٠٣٦٩ | ١٢,٧٩٢١ |
| ٥,١٩٤٨ | ١٣,٣٢١٠ |
| ٦,٤٨٧٧ | ١٤,٢٢٤٢ |
| ٧,٨١٥٠ | ١٦,٣٥٣٩ |
| ٤٦,٢٥٩٤ | ١٦٠,١٤٥٠ |

$$\hat{ب} = \frac{مجـ\ س'ص' - \frac{مجـ\ س'\ مجـ\ ض'}{ن}}{مجـ\ س'^٢ - \frac{(مجـ\ س')^٢}{ن}}$$

$$= \frac{٤٦,٢٥٩٤ - \frac{١٣,١٢٨٥ \times ٤٧,١٣٩٦}{١٤}}{١٦٠,١٤٥٠ - \frac{(٤٧,١٣٩٦)^٢}{١٤}}$$

$$= \frac{٢,٠٥٤٢}{١,٤٢٠٦} = ١,٤٤٦٠$$

$$\hat{أ}' = \overline{ص'} - \hat{ب}\ \overline{س'}$$

$$= \frac{١٣,١٢٨٥}{١٤} - ١,٤٤٦٠ \times \frac{٤٧,١٣٩٦}{١٤}$$

= ٠,٩١٧٨ - ٤,٨١٨٩

= - ٣,٩٣١١

وباستخدام جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن

أ̂ = ٠,٠٠٠١١٦٩

∴ ص̂ = ٠,٠٠٠١١٦٩ س^١,٤٤٦٠

**ثالثاً:** النموذج ص = $\frac{\text{س}}{\text{أس+ب}}$ يحوّل إلى معادلة خطية من الدرجة الأولى كما يلي:

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{\text{أس+ب}}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{أس+ب}$$

فإذا رمزنا لحاصل قسمة س على ص بالرمز ص′ ، فإن

ص′ = أس+ب

**مثـــال:**

يعتقد بأن العلاقة بين حجم المنتج (س) وعدد العمال (ص) هي من الصورة

$$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{أس+ب}} \; .$$

وفّق هذا النموذج للبيانات التالية:

| حجم المنتج (س) بالآلاف | عدد العمال (ص) | $\text{ص}' = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ | س ص' | $\text{س}^{٢}$ |
|---|---|---|---|---|
| ١,٠ | ٣٠٠ | ٠,٠٠٣٣ | ٠,٠٠٣٣ | ١ |
| ١,٢ | ٤٠٠ | ٠,٠٠٣٠ | ٠,٠٠٣٦ | ١,٤٤ |
| ١٠,٠ | ٢٤٠٠ | ٠,٠٠٤٢ | ٠,٠٤٢٠ | ١٠٠,٠٠ |
| ١٨,٠ | ٣١٠٠ | ٠,٠٠٥٨ | ٠,١٠٤٤ | ٣٢٤,٠٠ |
| ٢٤,٠ | ٣٦٠٠ | ٠,٠٠٦٧ | ٠,١٦٠٨ | ٥٧٦,٠٠ |
| ٣٢,٠ | ٣٩٠٠ | ٠,٠٠٨٢ | ٠,٢٦٢٤ | ١٠٢٤,٠٠ |
| ٣٨,٠ | ٤٧٠٠ | ٠,٠٠٨١ | ٠,٣٠٧٨ | ١٤٤٤ |
| ٤٠,٠ | ٤٦٠٠ | ٠,٠٠٨٧ | ٠,٣٤٨٠ | ١٦٠٠ |
| ٤٦,٠ | ٤٨٠٠ | ٠,٠٠٩٦ | ٠,٤٤١٦ | ٢١١٦ |
| ٥٠,٠ | ٤٧٠٠ | ٠,٠١٠٦ | ٠,٥٣٠٠ | ٢٥٠٠ |
| ٢٦٠,٢ | ٣٢٥٠٠ | ٠,٠٦٨٢ | ٢,٢٠٣٩ | ٩٦٨٦,٤٤ |

$$\hat{\text{أ}} = \frac{\text{مجـ س ص}' - \frac{\text{مجـ س مجـ ص}'}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{٢,٢٠٣٩ - \frac{٠,٠٦٨٢ \times ٢٦٠,٢}{١٠}}{٩٦٨٦,٤٤ - \frac{(٢٦٠,٢)^{٢}}{١٠}}$$

$$= ٠,٠٠٠١٥$$

$$\hat{\text{ب}} = \overline{\text{ص}'} - \hat{\text{أ}}\ \overline{\text{س}}$$

$$\frac{٠,٠٦٨٢}{١٠} - ٠,٠٠٠١٥\ \frac{٢٦٠,٢}{١٠}$$

$$= ٠,٠٠٢٩٢$$

$$\therefore \hat{\text{ص}} = \frac{\text{س}}{٠,٠٠٠١٥\ \text{س} + ٠,٠٠٢٩٢}$$

رابعا: يوجد ايضا بعض النماذج الأخرى التي يمكن تحويلها إلى نماذج خطية منها:

١ - العلاقة الأسية: ص = ب أ^س^

ويمكن تحويلها إلى خط مستقيم على النحو التالي:

لو ص = لو ب + س لو أ

فإذا وضعنا: لو ص = ص′ ، لو أ = أ′ لو ب = ب′

فإن ص′ = أ′ س + ب′ وبالتالي يمكن تقدير أ′، ب′ بطريقة المربعات الصغرى.

٢ - القطع الزائد: ص = $\frac{١}{أ_{س+ب}}$

ويمكن تحويله إلى خط مستقيم على النحو التالي:

$\frac{١}{ص}$ = أ~س+ب~

وإذا وضعنا $\frac{١}{ص}$ = ص′ فإن

ص′ = أ~س+ب~ وبالتالي تقدّر أ،ب بطريقة المربعات الصغرى.



# الفصل الثاني

## التقدير بفترة ثقة Interval Estimation

إذا كان المتغير س لـه دالة كثـافة إحتـمال بمعلمة واحـدة $\theta$ وقدرنـاها بـ $\hat{\theta}$ ($\hat{\theta}$ مقدّر العزوم أو الإمكان الأكبر أو المربعات الصغـرى) فإن هـذا المقدّر لا معنى لـه الا إذا كان مقترنا بمقياس للخطأ فى التقدير، ولذلـك فإنـه يفضل القـول بأن $\theta$ تقـع بين $\hat{\theta}$ - أ و $\hat{\theta}$ + أ بدرجة تأكد معينة، حيث أ قيمة ثابتة نعتمـد في حسابهـا، كما سيأتي فيـما بعد، عـلى درجة الثقـة أو مستوى المعنـوية وتـوزيع المعـاينة للمقـدّر أو المقيـاس الاحصائي الذي يستخدم أساساً في تكوين هذه الفترة.

(١ - ٢ - ٦) فترة ثقة لمتوسط مجتمع معتاد

١ ـ تباين المجتمع معلوم

إذا فرضنا أن المتغير س يتبع توزيعاً معتاداً توقعه $\mu$ وتباينـه $\sigma^2$ (كمية معلومـة) وأخـذنـا مـن هـذا المجتمـع عينـة عشـوائيـة مـن المشـاهـدات المستقلة $س_1$، $س_2$، . . . ، $س_ن$ فإن المقدار

$$ى = \frac{\bar{س} - ت\,(س)}{\sigma_{\bar{س}}} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}} \qquad (٦٢ - ٢ - ٦)$$

له توزيـع معتاد قيـاسي (توقعـه صفر وتبـاينه ١) وبما أن التوزيع المعتاد القياسي متماثل فإن:

$$ح\,(ى_{\frac{\alpha}{٢}} < ى < ى_{١-\frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha \qquad (٦٣ - ٢ - ٥٦)$$

حيث $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$ تمثل قيمة ى التي أقل منها $\frac{\alpha}{٢}$ من مسـاحة المنحنى المعتـاد القيـاسي، $ى_{١-\frac{\alpha}{٢}}$ القيمة التي أقـل منها ١ - $\frac{\alpha}{٢}$ من مسـاحة هـذا المنحنى.

وبالتعويض من (٦٢ - ٢ - ٦) في (٦٣ - ٢ - ٦) وتحويل المتباينات نجد أن فترة الثقة (١ - $\alpha$) ١٠٠٪ لمتوسط المجتمع المعتاد $\mu$ هي:

$$ح\left(\bar{س} - ى_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} < \mu < \bar{س} + ى_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}\right) = ١ - \alpha$$

(٦٤ - ٢ - ٦)

**مثال:**

البيانات التالية تمثل أعمار ١٠٠ مصباح كهربائي (بالساعة) أخذت كعينة من إنتاج أحد المصانع:

| العمر بالساعة | عدد المصابيح |
|---|---|
| ١٢٠٠ - | ٣ |
| ١٤٠٠ - | ٨ |
| ١٦٠٠ - | ١٨ |
| ١٨٠٠ - | ٣٠ |
| ٢٠٠٠ - | ٢٢ |
| ٢٢٠٠ - | ١٢ |
| ٢٤٠٠ - ٢٦٠٠ | ٧ |
| المجموع | ١٠٠ |

فإذا علم أن عمر المصباح الكهربائي يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وانحراف معياري $\sigma$ حيث $\sigma$ = ١٠٠ ساعة.

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط أعمار المصابيح الكهربائية التي ينتجها المصنع المذكور.

الحل

| مركز الفئة (س) | التكـــرار (ك) | س × ك |
|---|---|---|
| ١٣٠٠ | ٣ | ٣٩٠٠ |
| ١٥٠٠ | ٨ | ١٢٠٠٠ |
| ١٧٠٠ | ١٨ | ٣٠٦٠٠ |
| ١٩٠٠ | ٣٠ | ٥٧٠٠٠ |
| ٢١٠٠ | ٢٢ | ٤٦٢٠٠ |
| ٢٣٠٠ | ١٢ | ٢٧٦٠٠ |
| ٢٥٠٠ | ٧ | ١٧٥٠٠ |
| المجموع | ١٠٠ | ١٩٤٨٠٠ |

$$\therefore \bar{س} = \frac{١٩٤٨٠٠}{١٠٠} = ١٩٤٨ \text{ ساعة}$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (٣)) فإن $ى_{١-٠,٢٥} = ١,٩٦$،

وبالتعويض في المعادلة (٦٤ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$ح\left(١٩٤٨ - ١,٩٦\frac{١٠٠}{\sqrt{١٠٠}} < \mu < ١٩٤٨ + ١,٩٦\frac{٢٠٠}{\sqrt{١٠٠}}\right) = ٠,٩٥$$

$$ح\left(١٩٢٨,٤ < \mu < ١٩٦٧,٦\right) = ٠,٩٥$$

وهـذه الفترة تعني أنـه لو أخـذنا كـل العينات الممكنـة (ن = ١٠٠) من مجتمـع الدراسة وحسبنا لكل منها الوسط الحسابي وكوّنا في كل حالة فترة ثقة بالطريقة السابقة فإن ٩٥٪ من فترات الثقة تضم داخلها متوسط المجتمع $\mu$.

٢ ـ تباين المجتمع غير معلوم

إذا فـرضنا أن المتغـير س يتبع تـوزيعا معتـادا توقعـه $\mu$ وتباينـه $\sigma^2$ (كمية غـير معلومـة) وأخذنا من هذا المجتمع عبنة عشوائيـة من المشاهـدات المستقلة $س_١$، $س_٢$، . . . . ، $س_ن$ فإن المقدار

$$ت = \frac{\bar{س} - ت(\bar{س})}{\hat{\sigma}_{\bar{س}}} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}} \qquad (٦٥ـ٢ـ٦)$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية(ن - ١)،حيث ع = $\frac{\text{مجـ}(س - \overline{س})^٢}{ن - ١}$ ،وبما أن توزيع ت متماثل فإن:

$$ح (ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha \qquad (٦٦ - ٢ - ٦)$$

وبالتعويض من (٦٥ - ٢ - ٦) في (٦٦ - ٢ - ٦) وتحويل المتباينات فإن فترة الثقة (١ - $\alpha$)١٠٠٪ لمتوسط المجتمع المعتاد $\mu$ هي:

$$ح (\overline{س} - ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \frac{ع}{\sqrt{ن}} < \mu < \overline{س} + ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \frac{ع}{\sqrt{ن}}) = ١ - \alpha$$

(٦٧ - ٢ - ٦)

إذا فرضنا في المثال المعطى في (١ - ٢ - ٦) أن تباين المجتمع $\sigma^٢$ غير معلوم فإنه يلزم لحساب فترة الثقة لمتوسط المجتمع $\mu$ تقدير تباين المجتمع $\sigma^٢$ بتباين العينة (ع$^٢$) والذي يمكن حسابه على النحو التالي:

إذا فرضنا في مثال الفقرة (١ - ٢ - ٦) أن تباين عمر المصباح الكهربائي $\sigma^٢$ غير معلوم فإننا نقدره بالمقدر غير المتحيز ع$^٢$ = $\frac{١}{ن - ١}$ مجـ (س - $\overline{س}$)$^٢$ وذلك على النحو التالي:

| س - $\overline{س}$ | | (س - $\overline{س}$)$^٢$ | (س - $\overline{س}$)$^٢$ ك |
|---|---|---|---|
| ١٣٠٠ - ١٩٤٨ = | -٦٤٨ | ٤١٩٩٠٤ | ١٢٥٩٧١٢ |
| ١٥٠٠ - ١٩٤٨ = | -٤٤٨ | ٢٠٠٧٠٤ | ١٦٠٥٦٣٢ |
| ١٧٠٠ - ١٩٤٨ = | -٢٤٨ | ٦١٥٠٤ | ١١٠٧٠٧٢ |
| ١٩٠٠ - ١٩٤٨ = | -٤٨ | ٢٣٠٤ | ٦٩١٢٠ |
| ٢١٠٠ - ١٩٤٨ = | ١٥٢ | ٢٣١٠٤ | ٥٠٨٢٨٨ |
| ٢٣٠٠ - ١٩٤٨ = | ٣٥٢ | ١٢٣٩٠٤ | ١٤٨٦٨٤٨ |
| ٢٥٠٠ - ١٩٤٨ = | ٥٥٢ | ٣٠٤٧٠٤ | ٢١٣٢٩٢٨ |
| | | | ٨١٦٩٦٠٠ |

$$ع = \sqrt{\frac{٨١٦٩٦٠٠}{١٠٠ - ١}} = \sqrt{٨٢٥٢١٫٢١٢} = ٢٨٧٫٣ \text{ ساعة}$$

ومن جدول توزيع ت (جدول رقم (٥)) فإن $ت_{٠,٩٧٥؛ ٩٩}$ = ١,٩٩

والتعويض في (٦٧ ـ ٢ ـ ٦)، فإن فترة الثقة ٠,٩٥ لمتوسط عمر المصباح الكهربائي $\mu$ هي:

$$ح(١٩٤٨ - ١,٩٩ \times \frac{٢٨٧,٣}{\sqrt{١٠٠}} < \mu < ١٩٤٨ + ١,٩٩ \times \frac{٢٨٧,٣}{\sqrt{١٠٠}}) =$$

٠,٩٥ أي أن:

$$ح (١٨٩٠,٢ < \mu < ٢٠٠٥,٨) = ٠,٩٥$$

(٢ ـ ٢ ـ ٦) فترة ثقة للنسبة

نود في كثير من الأحيان تقدير نسبة المفردات في مجتمع معين (ح) التي تحمل صفة معينة، ولقد سبق أن قدرنا هذه النسبة بنقطة. ولكي نقدر ح بفترة ثقة فإنه يمكن استخدام توزيع ذي الحدين أو توزيع الهايبرجيومترك (لمعرفة أوجه التشابه والاختلاف بين توزيع ذي الحدين وتوزيع الهايبرجيومترك يرجع القارىء إلى الفصل الأول من الباب الرابع). ولصعوبة العمليات الحسابية وكثرتها في استخدام هذين التوزيعين فإننا نستخدم التوزيع الطبيعي في تكوين هذه الفترة، حيث أنه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين (متقطع) بالتوزيع الطبيعي (متصل) إذا كانت ح = $\frac{١}{٢}$ أو إذا كانت ن كبيرة وح لا تختلف كثيراً عن $\frac{١}{٢}$ (أنظر نظرية ديموافر في الفصل الأول من الباب الخامس)، وفي حالة التقريب فإن إحتمال أن يكون عدد المفردات التي تحمل صفة معينة مثلا هو ٥ يساوي إحتمال أن تقع قيمة المتغير الطبيعي بين ٤,٥ و٥,٥

فإن أخذنا عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع ما نسبة مفرداته التي تحمل الصفة موضوع الدراسة هي ح وكانت نسبة المفردات في العينة التي تحمل هذه الصفة هي $\hat{ح}$، فإن المقدار.

$$ى = \frac{\hat{ح} - ت(ح)}{\sigma_{\hat{ح}}} = \frac{\hat{ح} - ح}{\sqrt{\frac{ح(١ - ح)}{ن}}} \qquad (٦٨ ـ ٢ ـ ٦)$$

له توزيع معتاد قياسي (توقعه صفر وتباينه ١) (أنظر المعادلة (٣٢ ـ ١ ـ ٥))، وبالتالي نعرّف فترة الثقة في هذه الحالة بالتعويض من (٦٨ ـ ٢ ـ ٦) في (٦٣ ـ ٢ ـ ٦):

$$ح\left(\hat{ح} - ى_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ح}(1-\hat{ح})}{ن}} < ح < \hat{ح} + ى_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ح}(1-\hat{ح})}{ن}}\right) = 1 - \alpha \qquad (٦ - ٢ - ٦٩)$$

**مثال:**

إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها ٥٠٠ من القوة العاملة في بلد ما ووجدنا أن من بينهم ٤٠ شخصا عاطلين عن العمل، كوّن فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة العاطلين عن العمل في هذا البلد.

**الحل**

$$\hat{ح} = \frac{ر}{ن} = \frac{٤٠}{٥٠٠} = ٠,٠٨$$

من جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (٣)) $ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$

وبالتعويض في (٦٩ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$ح\left(٠,٠٨ - ١,٩٦ \sqrt{\frac{٠,٠٨ \times ٠,٩٢}{٥٠٠}} < ح < ٠,٠٨ + ١,٩٦ \sqrt{\frac{٠,٠٨ \times ٠,٩٢}{٥٠٠}}\right) = ٠,٩٥$$

أي أن

$$ح(٠,٠٥٦ < ح < ٠,١٠٤) = ٠,٩٥$$

**(٣ ـ ٢ ـ ٦) فترات الثقة للفروق والمجاميع**

**أولاً: فترات ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين**

إذا كان $س_1$ مجتمعا معتادا توقعه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ وكان $س_2$ مجتمعا معتادا أيضاً توقعه $\mu_2$ وتباسنه $\sigma_2^2$ وأخذنا من هـذين المجتمعين عينتـين مستقلتين أحجـامهما $ن_1$، $ن_2$ على التوالي، حيث أن:

$س_{11}$، $س_{21}$، . . . . . ، $س_{ن_1 1}$ مأخوذة من المجتمع $س_1$

$س_{12}$، $س_{22}$، . . . . . ، $س_{ن_2 2}$ مأخوذة من المجتمع $س_2$

فـإننا نكـون فترة ثقـة للفرق بـين متوسـطي المجتمعين $س_1$، $س_2$ في الحـالتين التاليتين:

١ - $\sigma_1^2$، $\sigma_2^2$ كميتين معلومتين

٢ - $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (كمية غير معلومة)

أما إذا كانت $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ وكل منهما غير معلومة فإن الطريقة المستخدمة في تكوين فترة الثقة هي طريقة Fisher-Behrens ولن نتعرض لدراستها في هذا الكتاب.

١ - فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين معتادين إذا كانت $\sigma_1^2$، $\sigma_2^2$ كميتين معلومتين:

إن المقدّر أو المقياس الإحصائي المستخدم في تكوين فترة الثقة هو $\bar{س}_1 - \bar{س}_2$، حيث $\bar{س}_1$ الوسط الحسابي للعينة الأولى المأخوذة من المجتمع الأول $س_1$ و$\bar{س}_2$ هو الوسط الحسابي للعينة الثانية المأخوذة من المجتمع الثاني $س_2$، كما أن

$$ت(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$تبا(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = تبا(\bar{س}_1) + تبا(\bar{س}_2) = \frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}$$

لذا فإن المقدار

$$ى = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}} \qquad (٦ - ٢ - ٦٩)$$

له توزيع معتاد قياسي توقعه صفر وتباينه ١. وباستخدام خواص التوزيع المعتاد القياسي فإن

$$ح(ى_{\frac{\alpha}{2}} < ى < ى_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \qquad (٦ - ٢ - ٧٠)$$

وبالتعويض من (٦٩ - ٢ - ٦) في (٧٠ - ٢ - ٦) وتحويل المتباينات فإن

$$ح\left((\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - ى_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{س}_1 - \bar{س}_2)\right.$$

$$\left. + ى_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}}\right)$$

$$= 1 - \alpha \qquad (٦ - ٢ - ٧١)$$

**مثـال:**

الجدول التالي يبين إنتاجية (وحدة في اليوم) مجموعتين مستقلتين من العمال حجم كل منها ١٠، مأخوذتين بشكل عشوائي من العمال الذين يعملون في مصنعين مختلفين أ، ب:

| العامل | المصنع أ | المصنع ب |
|---|---|---|
| ١ | ٥٤ | ٦٠ |
| ٢ | ٥٦ | ٥٩ |
| ٣ | ٥٠ | ٥٧ |
| ٤ | ٥٢ | ٥٦ |
| ٥ | ٥٤ | ٥٦ |
| ٦ | ٥٢ | ٥٨ |
| ٧ | ٥٦ | ٦٢ |
| ٨ | ٥٣ | ٥٥ |
| ٩ | ٥٣ | ٥٤ |
| ١٠ | ٦٠ | ٦٣ |

فإذا علم أن الانحراف المعياري للإنتاج اليومي للعامل الواحد في المصنع أ هو ٦ وحدات والانحراف المعياري للإنتاج اليومي للعامل الواحد في المصنع ب هو ٨، فإنه يمكن تقدير الفرق بين متوسط إنتاجية العامل في اليوم في المصنع أ ومتوسط إنتاجية العامل في اليوم في المصنع ب بنقطة وبفترة ثقة على النحو التالي:

$$\overline{س}_{١} = \frac{٥٤ + ٥٦ + \ldots + ٦٠}{١٠} = \frac{٥٤٠}{١٠} = ٥٤$$

$$\overline{س}_{٢} = \frac{٦٠ + ٥٩ + \ldots + ٦٤}{١٠} = \frac{٥٨٠}{١٠} = ٥٨$$

التقدير بنقطة = $\overline{س}_{١} - \overline{س}_{٢} = ٥٤ - ٥٨ = -٤$

أما التقدير بفترة ثقة ٩٥٪ مثلاً فإنه يمكن حسابه بالتعويض في (٧١ - ٢ - ٦) كما يلي:

$$ح\left((٥٤-٥٨) - ١,٩٦\sqrt{\frac{٣٦}{١٠}+\frac{٦٤}{١٠}} < \mu_1 - \mu_2 < (٥٤-٥٨) + \right.$$

$$\left. ١,٩٦\sqrt{\frac{٣٦}{١٠}+\frac{٦٤}{١٠}}\right) = ٠,٩٥$$

$$ح\,(-٤ - ١,٩٦ \times ٣,١٦ < \mu_1 - \mu_2 < -٤ + ١,٩٦ \times ٣,١٦) = ٠,٩٥$$

$$ح(-١٠,١٩٣٦ < \mu_1 - \mu_2 < ٢,١٩٣٦) = ٠,٩٥$$

٢ - فترة ثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين معتادين إذا كانت $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (كمية غير معلومة):

إن المقدّر أو المقياس الاحصائي المستخدم في تكوين فترة الثقة هو ($\bar{س}_1 - \bar{س}_2$) حيث أن $\bar{س}_1$ الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الاول س١، $\bar{س}_2$ الوسط الحسابي للعينة المأخوذة من المجتمع الاول س٢، كما أن:

$$ت(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

$$تبا(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) = \frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2} = \sigma^2\left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)$$

لذا فإن المقدار

$$ت = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{\sigma}^2\sqrt{\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}}} \qquad (٧٢-٢-٦)$$

له توزيع ت بدرجات حرية $ن_1 - ن_2 - ٢$، $\hat{\sigma}^2$ التباين التجميعي Pooled or Combined variance

ويمكن حسابه كما يلي:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن_1}(س_{1ر} - \bar{س}_1)^2 + \sum_{ر=1}^{ن_2}(س_{2ر} - \bar{س}_2)^2}{ن_1 + ن_2 - ٢}$$

$$= \frac{(ن_1 - 1)ع_1^2 + (ن_2 - 1)ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - ٢} \qquad (٧٣-٢-٦)$$

وباستخدام خواص توزيع ت فان

$$ح\left(ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}}\right) = ١ - \alpha \qquad (٦-٢-٧٤)$$

وبالتعويض من (٧٢-٢-٦)، (٧٣-٢-٦) في (٧٤-٢-٦) وتحويل المتباينات فإن

$$ح\left((\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) - ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{١}{ن_١}+\frac{١}{ن_٢}} < \mu_١ - \mu_٢ < (\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) + ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{١}{ن_١}+\frac{١}{ن_٢}}\right)$$

$$= ١ - \alpha \qquad (٦-٢-٧٥)$$

**مثال ١ :**

إذا كان متوسط عمر المصباح الكهربائي لعينة عشوائية مكونة من ١٥٠ مصباحاً مأخوذة من إنتاج المصنع أ هو ١٤٠٠ ساعة والانحراف المعياري للعمر من هذه العينة ١٢٠ ساعة ومتوسط عمر المصباح الكهربائي لعينة عشوائية مكونة من ٢٠٠ مصباح مأخوذة من إنتاج المصنع ب هو ١٢٠٠ ساعة والانحراف المعياري للعمر في هذه العينة هو ٨٠ ساعة، وإذا كانت العينتان العشوائيتان مستقلتين أوجد فترة ثقة ٩٩٪ للفرق بين متوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع أ ومتوسط عمر المصباح من إنتاج المصنع ب. (أفرض أن تباين عمر المصباح في المصنع أ يساوي تباين عمر المصباح في المصنع ب).

لإيجاد فترة الثقة، فإنه يلزم حساب التباين التجميعي $\bar{\sigma}^٢$ بالتعويض في المعادلة (٧٣-٢-٦).

$$\hat{\sigma}^٢ = \frac{(١٥٠ - ١)\ ١٢٠^٢ + (٢٠٠ - ١)\ ٨٠^٢}{(١٥٠ - ١) + (٢٠٠ - ١)}$$

$$\frac{٢١٤٥٦٠٠ + ١٢٧٣٦٠٠}{٣٤٨}$$

$$= ٩٨٢٥,٢٨٧٣$$

$$\therefore \hat{\sigma} = \sqrt{٩٨٢٥,٢٨٧٣} = ٩٩,١٢$$

وحيث أن عدد درجات الحرية كبير (٣٤٨) فإن توزيع ت يؤول إلى توزيع ى وبالتالي فإن ت٠,٩٩٥ = ى٠,٩٩٥ = ٢,٥٧٦ ، وبالتعويض في (٧٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$ح \left( (١٤٠٠ - ١٢٠٠) - ٢,٥٧٦ \times ٩٩,١٢ \sqrt{\frac{١}{١٥٠} + \frac{١}{٢٠٠}} \right.$$

$$> \mu_١ - \mu_٢ > (١٤٠٠ - ١٢٠٠) + ٢,٥٧٦ \times ٩٩,١٢ \sqrt{\frac{١}{١٥٠} + \frac{١}{٢٠٠}} \Bigg)$$

$$= ٠,٩٩$$

**مثـال ٢ :**

لدراسة الفرق بين متوسط انتاجية العامل في مصنعين مختلفين أ، ب، قام المسؤولون عن الإنتاج بتسجيل إنتاجية ٩ عمال في كل من المصنعين وكانت النتائج على النحو التالي:

| العامل: | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| انتاجية العامل في المصنع أ | ٣٢ | ٣٧ | ٣٥ | ٢٨ | ٤١ | ٤٤ | ٣٥ | ٣١ | ٣٤ |
| انتاجية العامل في المصنع ب | ٣٥ | ٣١ | ٢٩ | ٢٥ | ٣٤ | ٤٠ | ٢٧ | ٣٢ | ٣١ |

قدّر الفرق بين متوسط الإنتاجية في المصنع أ ومتوسط الانتاجية في المصنع ب بفترة ثقة ٩٥٪، إذا علم أن الانتاجية تتبع التوزيع الطبيعي كما أن التباين في الإنتاجية في المصنع أ يساوي التباين في الانتاجية في المصنع ب

**الحـل:**

إذا رمزنا لانتاجية العامل ر في المصنع أ بالرمز $س_{١ر}$ ر = ١ ، ٢ ، ... ٩

وإنتاجية العامل ر في المصنع ب بالرمز $س_{٢ر}$ ر = ١ ، ٢ ، ... ٩

فإن:

$$\overline{س}_١ = \frac{\sum_{ر=١}^{٩} س_{١ر}}{٩} = \frac{٣١٧}{٩} = ٣٥,٢٢$$

$$\overline{س}_٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{٩} س_{٢ر}}{٩} = \frac{٢٨٤}{٩} = ٣١,٥٦$$

$$\sum_{ر=١}^{٩} (س_{١ر} - \overline{س}_١)^٢ = ١٩٥,٥٦$$

$$\sum_{ر=1}^{9} (س_{٢ر} - \overline{س_٢})^2 = ١٦٠,٢٢$$

وبالتعويض في (٧٣ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$\text{التباين التجميعي } \hat{\sigma}^2 = \frac{١٦٠,٢٢ + ١٩٥,٥٦}{٩ + ٩ - ٢} = ٢٢,٢٤$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{٢٢,٢٤} = ٤,٧١$$

$$ت_{٠,٩٧٥ , ١٦} = ٢,١٢٠$$

وبالتعويض في (٧٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$ح\Big((٣٥,٢٢ - ٣١,٥٦) - ٢,١٢٠ \times ٤,٧١ \sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{١}{٩}} < \mu_1 - \mu_2 <$$

$$(٣٥,٢٢ - ٣١,٥٦) + ٢,١٢٠ \times ٤,٧١ \sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{١}{٩}}\Big) = ٠,٩٥$$

أي أن:

$$ح(٣,٦٦ - ٤,٧١ < \mu_1 - \mu_2 < ٣,٦٦ + ٤,٧١) = ٠,٩٥$$

$$ح(- ١,٠٥ < \mu_1 - \mu_2 < ٨,٣٧) = ٠,٩٥$$

**ثانياً: فترة ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين:**

افرض أن لدينا مجتمعين $س_١$، $س_٢$ ، وأن نسبة النجاح في المجتمع الأول هي $ح_١$ ونسبة النجاح في المجتمع الثاني هي $ح_٢$، وأخذنا عينة من المجتمع الأول حجمها $ن_١$، وعينة من المجتمع الثاني مستقلة عن العينة الأولى حجمها $ن_٢$ ووجدنا أن عدد المفردات التي تحمل الصفة محل الدراسة في العينة الأولى هو $ر_١$ وعددها في العينة الثانية هو $ر_٢$، فإنه يمكن تقدير الفرق بين $ح_١$ و $ح_٢$ بالمقدّر أو المقياس الاحصائي $\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢ = \frac{ر_١}{ن_١} - \frac{ر_٢}{ن_٢}$. ولتقدير الفرق بين النسبتين بدرجة ثقة معينة فإننا نفرض أن حجم العينة كبير ($ن \times ح > ٥$، $ن (١ - ح) > ٥$) بحيث يمكن القول بأن توزيع المعاينة للنسبة من العينة هو توزيع طبيعي.

وحيث أن العينتين مستقلتان فإن:

$$ت(\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢) = ت\left(\frac{ر_١}{ن_١} - \frac{ر_٢}{ن_٢}\right) = ت\left(\frac{ر_١}{ن_١}\right) - ت\left(\frac{ر_٢}{ن_٢}\right) = ح_١ - ح_٢$$

$$\text{تبا}(\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2) = \text{تبا}\left(\frac{ر_1}{ن_1} - \frac{ر_2}{ن_2}\right) = \text{تبا}\left(\frac{ر_1}{ن_1}\right) + \text{تبا}\left(\frac{ر_2}{ن_2}\right)$$

$$= \frac{ح_1(1 - ح_1)}{ن_1} + \frac{ح_2(1 - ح_2)}{ن_2}$$

لذا فإن توزيع المعاينة للمقدار.

$$ى = \frac{(\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2) - (ح_1 - ح_2)}{\sqrt{\frac{ح_1(1 - ح_1)}{ن_1} + \frac{ح_2(1 - ح_2)}{ن_2}}} \qquad (٧٦ - ٢ - ٦)$$

هو معتاد قياسي توقعه صفر وتباينه ١. وباستخدام خواص التوزيع المعتاد القياسي:

$$ح\left(ى_{\frac{\alpha}{2}} < ى < ى_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \qquad (٧٧ - ٢ - ٦)$$

وبالتعويض من (٧٦ - ٢ - ٦) في (٧٧ - ٢ - ٦) وتحويل امتباينات فإن:

$$ح\left((\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2) - ى_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ح}_1(1 - \hat{ح}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2(1 - \hat{ح}_2)}{ن_2}}\right.$$

$$< ح_1 - ح_2 <$$

$$\left.(\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2) + ى_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{ح}_1(1 - \hat{ح}_1)}{ن_1} + \frac{\hat{ح}_2(1 - \hat{ح}_2)}{ن_2}}\right) = 1 - \alpha$$

(٧٨ - ٢ - ٦)

**مثـال:**

اخترنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعي الراشدين والمراهقين، في بلد يعرض فيه برنامجاً تلفزيونياً معيناً، الأولى حجمها ٤٠٠ راشد والثانية حجمها ٦٠٠ مراهق. فإذا أشار ١٠٠ من أفراد عينة الراشدين و ٣٠٠ من أفراد عينة المراهقين إلى أنهم يحبون البرنامج المذكور، احسب فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين نسبتي الراشدين والمراهقين الذين يتابعون البرنامج المشار إليه في هذا البلد.

**الحـل:**

$$\hat{ح}_1 = \frac{ر_1}{ن_1} = \frac{١٠٠}{٤٠٠} = ٠,٢٥$$

$$\hat{ح}_٢ = \frac{ن_٢}{ر_٢} = \frac{٣٠٠}{٦٠٠} = ٠,٥٠$$

$$ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$$

وبالتعويض في (٧٨ ـ ٢ ـ ٦)

$$ح \Big((٠,٢٥ - ٠,٥٠) - ١,٩٦ \sqrt{\frac{٠,٢٥ \times ٠,٧٥}{٤٠٠} + \frac{٠,٥٠ \times ٠,٥٠}{٦٠٠}}$$

$$< ح_١ - ح_٢ <$$

$$(٠,٢٥ - ٠,٥٠) + ١,٩٦ \sqrt{\frac{٠,٢٥ \times ٠,٧٥}{٤٠٠} + \frac{٠,٥٠ \times ٠,٥٠}{٦٠٠}} \Big) = ٠,٩٥$$

$$ح \Big((- ٠,٢٥ - ٠,٠٥٨) < ح_١ - ح_٢ < (- ٠,٢٥ + ٠,٠٥٨)\Big) = ٠,٩٥$$

$$ح (- ٠,٣٠٨ < ح_١ - ح_٢ < - ٠,١٩٢) = ٠,٩٥$$

**٤ ـ ٢ ـ ٦) فترة ثقة للتباين:**

إذا فرضنا أن $س_١$، $س_٢$، . . . $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة من مجتمع معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^٢$ وهما غير معلومتين، فإن المقدار:

$$\chi^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{\sigma^٢} = \frac{(ن - ١) ع^٢}{\sigma^٢} \qquad (٧٨ - ٢ - ٦)$$

له توزيع $\chi^٢$ بدرجات حرية (ن − ١).

يمكن تكوين فترة ثقة للتباين $\sigma^٢$ باستخدام التعريف التالي:

$$ح \left(\chi^٢_١ < \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{\sigma^٢} < \chi^٢_٢\right) = ١ - \alpha$$

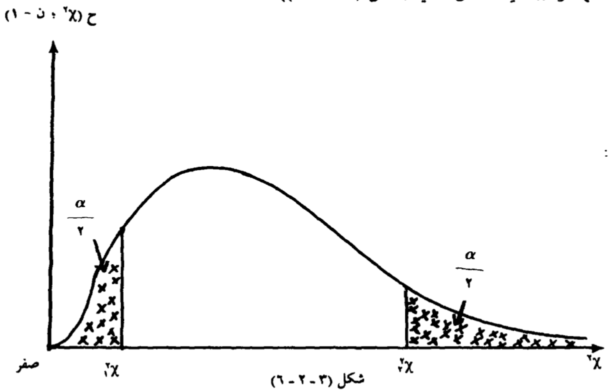
حيث $\chi^٢_١$ القيمة الصغرى، $\chi^٢_٢$ القيمة الكبرى.

وحيث أن دالة كثافة الاحتمال للمتغير $\chi^٢$ غير متماثلة فإنه يوجد بعض الحرية في اختيار قيمتي $\chi^٢_١$، $\chi^٢_٢$ والقيد الوحيد في عملية الاختيار هو أن تكون فترة الثقة أقصر ما يمكن Shortest Interval بحيث تكون المساحة تحت المنحنى بين $\chi^٢_١$ ، $\chi^٢_٢$ تساوى (١ − $\alpha$) ١٠٠٪، وقد وجد بالبرهان الرياضي أن أقصر فترة ثقة يمكن الحصول عليها إذا كان

$$\chi^٢_١ = \chi^٢_{\frac{\alpha}{٢}}$$ أي قيمة $\chi^٢$ التي أقل منها مساحة $\frac{\alpha}{٢}$

$\chi^2_{٢} = \chi^2_{١ - \frac{\alpha}{٢}}$ أي قيمة $\chi^2$ التي أقل منها مساحة $١ - \frac{\alpha}{٢}$

كما هو مبين في الشكل التالي (شكل (٣ ـ ٢ ـ ٦))




شكل (٣ ـ ٢ ـ ٦)

وبالتعويض عن $\chi^2_{١}$، $\chi^2_{٢}$ بالقيمتين $\chi^2_{\frac{\alpha}{٢}}$، $\chi^2_{١ - \frac{\alpha}{٢}}$ على التوالي في المعادلة (٧٨ - ٢ - ٦) فإن

$$ح(\chi^2_{\frac{\alpha}{٢}} < \frac{(ن - ١) ع^2}{\sigma^2} < \chi^2_{١ - \frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha$$

(٧٩ ـ ٢ ـ ٦)

وبإعادة ترتيب المتباينات في المعادلة (٧٩ ـ ٢ ـ ٦) نحصل على:

$$ح\left(\frac{(ن - ١) ع^2}{\chi^2_{١ - \frac{\alpha}{٢}}} < \sigma^2 < \frac{(ن - ١) ع^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{٢}}}\right) = ١ - \alpha \qquad (٨٠ ـ ٢ ـ ٦)$$

**مثـال:**

أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٥ إطار من إطارات السيارات التي تنتجها إحدى الشركات وحصلنا من هذه العينة على النتائج التالية:

| مدة خدمة الاطار (بالألف كم) | عدد الإطارات |
|---|---|
| ٢٠ - | ٣ |
| ٢٢ - | ٥ |
| ٢٤ - | ٨ |
| ٢٦ - | ٧ |
| ٢٨ - ٣٠ | ٢ |
| المجموع | ٢٥ |

**والمطلوب** تقدير تباين مدة الخدمة للإطارات التي تنتجها هذه الشركة بدرجة ثقة ٩٥٪.

**الحل**

| فئات الخدمة (بالألف كم) | مركز الفئة س | عدد الإطارات ك | الإنحراف المختزل ح َ | ح َ ك | ح َ ٢ × ك |
|---|---|---|---|---|---|
| ٢٠ - | ٢١ | ٣ | - ٢ | - ٦ | ١٢ |
| ٢٢ - | ٢٣ | ٥ | - ١ | - ٥ | ٥ |
| ٢٤ - | ٢٥ | ٨ | صفر | صفر | صفر |
| ٢٦ - | ٢٧ | ٧ | + ١ | ٧ | ٧ |
| ٢٨ - | ٢٩ | ٢ | + ٢ | ٤ | ٨ |
| المجموع | | ٢٥ | | صفر | ٣٢ |

متوسط مدة خدمة الإطار $\overline{\text{س}}$ $= \frac{\text{صفر}}{٢٥} \times ٢ + ٢٥ = ٢٥$ ألف كم

تباين مدة خدمة الإطار ع^٢ $= ٢^٢ \left( \frac{٣٢}{٢٥} - \left(\frac{\text{صفر}}{٢٥}\right)^٢ \right)$

$= \frac{١٢٨}{٢٥}$

$=$ ٥,١٢ الف كم^٢

درجات الحرية (ن - ١) = ٢٥ - ١ = ٢٤

من جدول رقم (٤)

$\chi^2_{٠,٠٢٥،٢٤} = ١٢,٤٠١١$

$\chi^2_{٠,٩٧٥،٢٤} = ٣٩,٣٦٤١$

وبالتعويض في (٨٠ - ٢ - ٦)

$$ح \left( \frac{٢٥ \, (٥,١٢)}{٣٩,٣٦٤١} < \sigma^2 < \frac{٢٥(٥,١٢)}{١٢,٤٠١١} \right) = ٠,٩٥$$

$$ح \, (٣,٢٥١٧ < \sigma^2 < ١٠,٣٢١٧) = ٠,٩٥$$

**(٥ - ٢ - ٦) فترة ثقة للإنحراف المعياري لمجتمع معتاد**

إذا كان لدينا متغير عشوائي س توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$ وأخذنا من هذا المتغير عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة $س_١$ ، $س_٢$ ، ..... ، $س_ن$، فإن الإنحراف المعياري لهذه المجموعة من المشاهدات المستقلة هو

$$ع = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2} \qquad (٨١ - ٢ - ٦)$$

وهو مقدّر متحيز للمعلمة $\sigma$.

فإذا كان المتغير س يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$ فإن

$$تبا(ع) = \frac{\sigma^2}{٢ \, ن} \qquad (٨٢ - ٢ - ٦)$$

أما إذا كان مجتمع س غير معتاد فإن

$$تبا(ع) \frac{\mu_٤ - \mu_٢^2}{٤ \, ن \, \mu_٢} \qquad (٨٣ - ٢ - ٦)$$

حيث $\mu_٢$ ، $\mu_٤$ العزمين الثاني والرابع حول الوسط الحسابي

من المعلوم أنه إذا كان مجتمع س معتاداً فإن

$$\mu_٢ = \sigma^2$$

$$\mu_٤ = ٣ \, \sigma^4 \qquad (٨٤ - ٢ - ٦)$$

وبالتعويض من (٨٤ ـ ٢ ـ ٦) في (٨٣ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$\text{تبا}(ع) = \frac{٣\sigma^{٤} - \sigma^{٤}}{٤ ن \sigma^{٢}} = \frac{\sigma^{٢}}{٢ ن}$$ وهي نفس النتيجة المعطاة بالمعادلة (٨٢ ـ ٢ ـ ٦)

وبشكل عام إذا كان حجم العينة كبيراً (ن ≥ ١٠٠) فإن توزيع المعاينة للمقدّر ع هو التوزيع الطبيعي تقريباً وبالتالي فإن:

$$ح\left(ى_{\frac{\alpha}{٢}} < \frac{ع - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{٢ ن}}} < ى_{١ - \frac{\alpha}{٢}}\right) = ١ - \alpha \quad (٨٥ - ٢ - ٦)$$

وبتحويل المتباينات في (٨٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$ح\left(ع - ي_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{٢ ن}} < \sigma < ع + ي_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{٢ ن}}\right) = ١ - \alpha$$

(٨٦ ـ ٢ ـ ٦)

حيث $\hat{\sigma}$ = ع.

**مثال:**

اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٢١ أسرة من بين الأسر التي تسكن في منطقة معينة وقد تبيّن أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية للأسر في العينة كما يلي:

| فئات الدخل الشهري بالدينار | عدد الأسر |
|---|---|
| ١٠٠ – ٢٠٠ | ١٠ |
| ٢٠٠ – ٣٠٠ | ٤٠ |
| ٣٠٠ – ٤٠٠ | ٤٤ |
| ٤٠٠ – ٥٠٠ | ١٨ |
| ٥٠٠ – ٦٠٠ | ٩ |
| المجموع | ١٢١ |

**والمطلوب:** تقدير الإنحراف المعياري للدخل بفترة ثقة ٩٥٪.

الحل

| مركز الفئة س | التكرار (ك) | الانحرافات المختزلة $\bar{ح}$ | $\bar{ح}$ × ك | $\bar{ح}^{٢}$ × ك |
|---|---|---|---|---|
| ١٥٠ | ١٠ | - ٢ | - ٢٠ | ٤٠ |
| ٢٥٠ | ٤٠ | - ١ | - ٤٠ | ٤٠ |
| ٣٥٠ | ٤٤ | صفر | صفر | صفر |
| ٤٥٠ | ١٨ | + ١ | ١٨ | ١٨ |
| ٥٥٠ | ٩ | + ٢ | ١٨ | ٣٦ |
| المجموع | ١٢١ | | - ٢٤ | ١٣٤ |

$$\text{ع} = \text{١٠٠} \sqrt{\frac{\text{١٣٤}}{\text{١٢١}} - \left(\frac{\text{-٢٤}}{\text{١٢١}}\right)^{\text{٢}}}$$

$$= \text{١٠٠} \sqrt{\text{١,١٠٧٤٣٨} - \text{٠,٠٣٩٣٤٢}}$$

$$= \text{١٠٠} \sqrt{\text{٠,٠٦٨٠٩٦}} = \text{١٠٣,٣٤٩ دينار}$$

ومن جدول رقم (٣) فإن

$$\text{ى}_{\text{١} - \frac{\text{٠,٠٥}}{\text{٢}}} = \text{ي}_{\text{٠,٩٧٥}} = \text{١,٩٦}$$

وبالتعويض في (٨٦ - ٢ - ٦)

$$\text{ح}\left(\text{١٠٣,٣٤٩} - \text{١,٩٦} \frac{\text{١٠٣,٣٤٩}}{\sqrt{\text{٢} \times \text{١٢١}}} < \sigma < \text{١٠٣,٣٤٩} + \text{١,٩٦} \frac{\text{١٠٣,٣٤٩}}{\sqrt{\text{٢} \times \text{١٢١}}}\right)$$

$$= \text{٠,٩٥}$$

$$\text{ح}\left(\text{٩٠,٣٢٨} < \sigma < \text{١١٦,٣٧٠}\right) = \text{٠,٩٥}$$

### (٦ - ٢ - ٦) فترة ثقة لمعامل الارتباط

نقدّر معامل الارتباط $\rho$ بين مجتمعين بمعامل ارتباط بيرسون (ر) بين مجموعة من أزواج القيم المتناظرة مأخوذة من هذين المجتمعين. ولتقديره بفترة ثقة فإننا نستخدم تحويل فيشر Fisher's Z Transformation التالي:

$$\text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ لن} \left(\frac{\text{١} + \text{ر}}{\text{١} - \text{ر}}\right) = \text{١,١٥١٣ لو} \left(\frac{\text{١} + \text{ر}}{\text{١} - \text{ر}}\right) \qquad \text{(٨٧ - ٢ - ٦)}$$

حيث لن اللوغاريتم للأساس هـ ولو اللوغاريتم للأساس ١٠ والمقدار س يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع

$$\mu = \frac{١}{٢} \text{ لن } \left( \frac{١ + \rho}{١ - \rho} \right) = ١,١٥١٣ \text{ لو} \left( \frac{١ + \rho}{١ - \rho} \right)$$

$$\text{وانحراف معياري} = \frac{١}{\sqrt{ن - ٣}}$$

وفترة الثقة يمكن تكوينها على النحو التالي:

$$ح\left( ي_{\frac{\alpha}{٢}} < \frac{س - \mu}{\sigma} < ي_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \right) = ١ - \alpha \qquad (٨٨ - ٢ - ٦)$$

وبتحويل المتباينات في (٨٨ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$ح\left( س - ى_{١ - \frac{\alpha}{٢}} < \mu < س + ى_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \right) = ١ - \alpha \qquad (٨٩ - ٢ - ٦)$$

ومن (٨٩ ـ ٢ ـ ٦) يمكن حساب فترة ثقة (١ - $\alpha$) ١٠٠٪ لمعامل الارتباط بين المجتمعين لأن $\mu$ دالة في $\rho$.

**مثال:**

إذا كان معامل الارتباط بين رأس المال والربح لمجموعة مكونة من ٤٠ محلاً تجارياً في مدينة معينة هو ٠,٩٠، أوجد فترة ثقة ٠,٩٥ لمعامل الارتباط بين رأس المال والربح.

**الحل**

بالتعويض في (٨٩ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$ح\left( ١,١٥١٣ \text{ لو} \frac{١ + ٠,٩٠}{١ - ٠,٩٠} - ١,٩٦ \sqrt{\frac{١}{٤٠ - ٣}} < \mu < ١,١٥١٣ \text{ لو} \frac{١ + ٠,٩٠}{١ - ٠,٩٠} + ١,٩٦ \sqrt{\frac{١}{٤٠ - ٣}} \right) = ٠,٩٥$$

$$ح\left( ١,١٥١٣ \text{ لو } ١٩ - ٠,٣٢٢٢ < \mu < ١,١٥١٣ \text{ لو } ١٩ + ٠,٣٢٢٢ \right) = ٠,٩٥$$

ح $(٠,٣٢٢٢ + ١,٢٧٨٨ \times ١,١٥١٣ > \mu > ٠,٣٢٢٢ - ١,٢٧٨٨ \times ١,١٥١٣)$

$= ٠,٩٥$

ح $(١,٧٩٤٥ > \mu > ١,١٥٠١) = ٠,٩٥$

إذا كانت $\mu = ١,١٥٠١$

فإن $١,١٥٠١ = ١,١٥١٣$ لو $\frac{١ + \rho}{١ - \rho}$

أي أن لو $\frac{١ + \rho}{١ - \rho} = ٠,٩٩٩٠$

ومن جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فإن

$$\frac{١ + \rho}{١ - \rho} = ٩,٩٧٧$$

$$\rho + ١ = \rho\, ٩,٩٧٧ - ٩,٩٧٧$$

$$١ - ٩,٩٧٧ = \rho\, ١٠,٩٧٧$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{٨,٩٧٧}{١٠,٩٧٧} = ٠,٨١٧٨$$

أما إذا كانت $\mu = ١,٧٩٤٥$

فإن $١,٧٩٤٥ = ١,١٥١٣$ لو $\frac{١ + \rho}{١ - \rho}$

أي أن لو $\frac{١ + \rho}{١ - \rho} = ١,٥٥٨٧$

ومن جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات فإن

$$\frac{١ + \rho}{١ - \rho} = ٣٦,٢٠$$

$$\rho + ١ = \rho\, ٣٦,٢٠ - ٣٦,٢٠ \qquad ٣٥,٢٠ = \rho\, ٣٧,٢٠$$

$$\therefore \rho = \frac{٣٥,٢٠}{٣٧,٢٠} = ٠,٩٤٦٢$$

وبالتالي فإن

$$ح(٠,٨١٧٨ < \rho < ٠,٩٤٦٢) = ٠,٩٥$$

## (٧ ـ ٢ ـ ٦) فترات ثقة لمعالم النموذج الخطي البسيط والقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معيّن للمتغير المستقل

**أولاً:** فترة ثقة لمعامل انحدار ص على س

من المعلوم أن المقدار

$$ت = \frac{\hat{أ} - أ}{\hat{\sigma}_{أ}} = \frac{\hat{أ} - أ}{\sqrt{\frac{MSE}{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}}} \qquad (٦-٢-٩٠)$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن ـ ٢)

وبما أن توزيع ت متماثل فإن

$$ح(ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha \qquad (٦-٢-٩١)$$

وبالتعويض من (٣٥ ـ ٢ ـ ٦) ، (٩٠ ـ ٢ ـ ٦) في (٩١ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات نجد أن

$$ح\Bigg(\hat{أ} - ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sqrt{MSE}}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}} < أ < \hat{أ} +$$

$$ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sqrt{MSE}}{\sqrt{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}}\Bigg) = ١ - \alpha \qquad (٦-٢-٩٢)$$

**مثـال:**

بالرجوع إلى بيانـات التمرين التـوضيحي ١ في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب هو تكوين فترة ثقة ٠,٩٥ للمعلمة أ ، فإن $\hat{\rho} = ٢,١$

درجات الحرية = ن − ٢ = ٥ − ٢ = ٣

$\hat{\sigma}^٢ = MSE = ٠,٦٣٣$

$ت_{٠,٩٧٥،٣}$ (من جدول رقم (٥)) = ٣,١٨

$$\sum_{ر=١}^{٥}(س_ر - \bar{س})^٢ = (٣ - ٣)^٢ + (١ - ٣)^٢ + (٢ - ٣)^٢ + (٥ - ٣)^٢ + (٤ - ٣)^٢$$

$$= ١٠$$

وبالتعويض في (٩٢ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$ح\left(٢,١ - ٣,١٨ \sqrt{\frac{٠,٦٣٣}{١٠}} < أ < ٢,١ + ٣,١٨ \sqrt{\frac{٠,٦٣٣}{١٠}}\right) = ,٩٥$$

أي أن

$$ح\left(٠,١,٣ < أ < ٢,٩\right) = ٠,٩٥$$

ثانياً: فترة ثقة للمعلمة ب (الجزء المقطوع من محور الصادات)

من المعلوم أن

$$ت = \frac{\hat{ب} - ب}{\hat{\sigma}_{\hat{ب}}} = \frac{\hat{ب} - ب}{\sqrt{MSE\left\{\frac{١}{ن} + \frac{\bar{س}^٢}{\sum_{ر=١}^{ن}(س_ر - \bar{س})^٢}\right\}}} = ١ - \alpha$$

(٩٥ ـ ٢ ـ ٦)

وبما أن توزيع ت متماثل فإن:

$$ح\left(ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}\right) = ١ - \alpha$$

(٩٤ ـ ٢ ـ ٦)

وبـالتعـويض من (٣٧ ـ ٢ ـ ٦)، (٩٣ ـ ٢ ـ ٦) في (٩٤ ـ ٢ ـ ٦) وتحـويـل المتباينات فإن:

$$ح\left(\hat{ب} - ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \sqrt{MSE\left\{\frac{١}{ن} + \frac{\bar{س}^٢}{\sum(س_ر - \bar{س})^٢}\right\}} < ب < \right.$$

$$\left.\hat{ب} + ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \sqrt{MSE\left\{\frac{١}{ن} + \frac{\bar{س}^٢}{\sum(س_ر - \bar{س})^٢}\right\}}\right) = ١ - \alpha$$

(٩٥ ـ ٢ ـ ٦)

**مثـال:**

بالرجوع إلى بيانات التمرين التـوضيحي ١ في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب تكوين فترة ثقة ٩٥٪ للمعلمة ب ، فإن

$\hat{ب} = ٢,٧$

درجات الحرية = ن - ٢ = ٥ - ٢ = ٣

MSE = ٠,٦٣٣

$ت_{٣,٠.٩٧٥}$ (من جدول رقم (٥)) = ٣,١٨

$$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \overline{س})^٢ = ١٠$$

وبالتعويض في (٩٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$ح \left( ٢,٧ - ٣,١٨ \sqrt{٠,٦٣٣ \left\{ \frac{١}{٥} + \frac{٣^٢}{١٠} \right\}} < ب < \right.$$

$$\left. ٢,٧ + ٣,١٨ \sqrt{٠,٦٣٣ \left\{ \frac{١}{٥} + \frac{٣^٢}{١٠} \right\}} \right) = ٠,٩٥$$

أي أن

$$ح (٠,٤٦ < ب < ٥,٣٥٤) = ٠,٩٥$$

**ثالثاً**: فترة ثقة للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل

من المعلوم أن

$$ت = \frac{\hat{ص}_م - ت(\hat{ص}_م)}{\hat{\sigma}_{\hat{ص}_م}} \qquad (٩٦ - ٢ - ٦)$$

له توزيع ت بدرجات حرية ن - ٢

وباستخدام خاصية التماثل لتوزيع ت فإن

$$ح (ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha \qquad (٩٧ - ٢ - ٦)$$

وبالتعويض من (٤١ ـ ٢ ـ ٦)، (٩٦ ـ ٢ ـ ٦) في (٩٧ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات فإن

$$ح \left( \hat{ص}_م - ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \sqrt{MSE \left\{ \frac{١}{ن} + \frac{(س_م - \overline{س})^٢}{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢} \right\}} < ت(ص_م) < \right.$$

$$\left. \hat{ص}_م + ت_{١ - \frac{\alpha}{٢}} \sqrt{MSE \left\{ \frac{١}{ن} + \frac{(س_م - \overline{س})^٢}{\sum (س_ر - \overline{س})^٢} \right\}} \right) = ١ - \alpha$$

(٩٨ ـ ٢ ـ ٦)

مثـــال:

بالرجـوع إلى بيانـات التمرين التـوضيحي، في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب هو تكوين فترة ثقة ٠,٩٥ للقيمـة الإتجاهيـة للمتغير التـابع عنـدما

تكون س = ٢,٥ ، فإن

$\hat{ص}_{٢,٥} = ٢,١ \times ٢,٥ = ٧,٩٥$

درجات الحرية = ن − ٢ = ٥ − ٢ = ٣

MSE = ٠,٦٣٣

$ت_{٣,٠,٩٧٥}$ (من جدول رقم (٥)) = ٣,١٨

$\sum_{ر=١}^{٥} (س_ر - \bar{س})^٢ = ١٠$

$(س_م - \bar{س})^٢ = (٢,٥ - ٣)^٢ = ٠,٢٥$

وبالتعويض في (٩٨ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$ح \left(٧,٩٥ - ٣,١٨ \sqrt{٠,٦٣٣ \left\{\frac{١}{٥} + \frac{٠,٢٥}{١٠}\right\}} < ت(\hat{ص}_م) < \right.$$

$$٧,٩٥ - ٣,١٨ \sqrt{٠,٦٣٣ \left\{\frac{١}{٥} + \frac{٠,٢٥}{١٠}\right\}} = ٠,٩٥$$

أي أن

$$ح (٦,٧٥ < ت(\hat{ص}_م) < ٩,١٥) = ٠,٩٥$$

## (٨ ـ ٢ ـ ٦) فترات ثقة لمعالم النموذج الخطي العام والقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستويات معينة للمتغيرات المستقلة

**أولاً:** فترة ثقة للمعلمة $أ_ر$ في النموذج (٢٥ ـ ٢ ـ ٦)

$$ت = \frac{\hat{أ}_ر - أ_ر}{\hat{\sigma}_{\hat{أ}_ر}} ، ر = ١ ، ٢ ، ..... ، و \qquad (٩٩ ـ ٢ ـ ٦)$$

له توزيع ت بدرجات حرية ن − و

وباستخدام خاصية التماثل لتوزيع ت فإن

$$ح (ت_{\frac{\alpha}{٢}} < ت < ت_{١-\frac{\alpha}{٢}}) = ١ - \alpha \qquad (١٠٠ ـ ٢ ـ ٦)$$

وبالتعويض من (٢٧ ـ ٢ ـ ٦) ، (٩٩ ـ ٢ ـ ٦) في (١٠٠ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات فإن فترة الثقة للمعلمة $أ_ر$ هي :

$$ح (\hat{أ}_ر - ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \hat{\sigma}_{\hat{أ}_ر} < أ_ر < \hat{أ}_ر + ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \hat{\sigma}_{\hat{أ}_ر}) = ١ - \alpha \qquad (١٠١ ـ ٢ ـ ٦)$$

حيث أن تباين $\hat{أ}_ر$ عبارة عن العنصر الرائي على القطر الرئيسي للمصفوفة MSE $(س'س)^{-١}$

**مثـــال:**

بالرجوع إلى بيانـات التمرين التـوضيحي ٢ في الفصل الأول من هـذا الباب، وإذا كان المطلوب هو تكوين فترة ٠,٩٥ للمعلمة أ$_1$ مثلاً، فإن

$\hat{أ}_1 = ٤٠$

درجات الحرية = ن - ٣ = ١٦ - ٣ = ١٣

$$MSE = \frac{٢٨٦٠}{١٣} = ٢٢٠$$

ت$_{١٣،٠,٩٧٥}$ (باستخدام جدول رقم (٥)) = ٢,١٦

$\hat{\sigma}^2_{أ_1}$ = ٢٢٠ × ٠,٥٠ = ١١٠

وبالتعويض في (١٠١ ـ ٢ ـ ٦) فإن

ح (٤٠ - ٢,١٦ $\sqrt{١١٠}$ < أ$_1$ < ٤٠ + ٢,١٦ $\sqrt{١١٠}$) = ٠,٩٥

أي أن:

ح (١٧,٣٤٥٧ < أ$_1$ < ٦٢,٦٥٤٣) = ٠,٩٥

**ثانياً:** فترة ثقة للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع عند مستويـات محدّدة للمتغـيرات المستقلة في النموذج الخطي العام.

من المعلوم أن المقدار

$$ت = \frac{\hat{ص}_م - ت(\hat{ص}_م)}{\hat{\sigma}_{\hat{ص}_م}} \qquad (١٠٢ - ٢ - ٦)$$

يتبع التوزيع ت بدرجات حرية ن - و

ومن خاصية التماثل لتوزيع ت فإن

$$ح\,(ت_{\frac{\alpha}{2}} < ت < ت_{1-\frac{\alpha}{2}}) = ١ - \alpha \qquad (١٠٣ - ٢ - ٦)$$

وبالتعويض من (٦٠ ـ ٢ ـ ٦)، (١٠٢ ـ ٢ ـ ٦) وتحويل المتباينات فإن

$$ح\,(\hat{ص}_م - ت_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\sigma}^2\, \underline{س}'_م (س'س)^{-1} \underline{س}_م} < ت(\hat{ص}_م) <$$

$$\hat{ص}_م + ت_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\sigma}^2\, \underline{س}'_م (س'س)^{-1} \underline{س}_م}) = ١ - \alpha \qquad (١٠٤ - ٢ - ٦)$$

**مثـــال:**

بالرجوع إلى بيانـات التمرين التـوضيحي ٢ في الفصل الأول من هـذا الباب،

وإذا كان المطلوب تكوين فترة ثقة ٠,٩٥ للقيمة الإتجاهية للمتغير التابع إذا علم أن $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ٥$ فإن

$\hat{ص}_م = ١٢٤$

درجات الحرية = ن - ٣ = ١٦ - ٣ = ١٣

$$MSE = \frac{٢٨٦٠}{١٣} = ٢٢٠$$

$ت_{١٣،٠,٩٧٥}$ (من جدول رقم (٥)) = ٢,١٦

$$تبا(\hat{ص}_م) = \hat{\sigma}^2 \, \underline{س'_م} \, (س'س)^{-1} \, \underline{س_م}$$

$$= ٢٢٠ \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٠,٢٠ & -٠,٢٥ & -٠,٠٥ \\ -٠,٢٥ & ٠,٥٥ & صفر \\ -٠,٠٥ & صفر & ٠,٢٠ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$= ٢٢٠ \begin{bmatrix} -٠,٨٠ & ١,٢٥ & ١,٩٥ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

$$= ٢٢٠ \times ٧,٧ = ١٦٩٤$$

وبالتعويض في (١٠٤ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$ح\,(٨٢,٨٤١٨ < ت\,(\hat{ص}_م) < ١٦٥,١٥٨٢) = ٠,٩٥$$

**ثالثاً**: فترات ثقة مشتركة Joint Confidence Interval لمعالم النموذج الخطي العام

تستخدم طريقة بونفيرني Bonferroni Method لإيجاد فترات ثقة مشتركة لمعالم النموذج الخطي العام (بما فيه النموذج الخطي البسيط).

في حالة النموذج الخطي البسيط (٢٤ ـ ٢ ـ ٦) فإن فترات الثقة المشتركة هي:

$$\hat{أ} - ت^* \hat{\sigma}_{\hat{أ}} < أ < \hat{أ} + ت^* \hat{\sigma}_{\hat{أ}} \qquad (١٠٥ـ ٢ ـ ٦)$$

$$\hat{ب} - ت^* \hat{\sigma}_{\hat{ب}} < ب < \hat{ب} + ت^* \hat{\sigma}_{\hat{ب}}$$

$$حيث\ ت^* = ت\,(١ - \frac{\alpha}{٤} \,،\, ن - ٢)$$

فإذا رجعنا إلى بيانات التمرين التوضيحي ١ في الفصل الأول من هذا الباب وأردنا تكوين فترات ثقة مشتركة ٠,٩٠ فإن

$$\text{ت}^{*} = \text{ت}_{1 - \frac{0.1}{4}\text{، } ٣} = \text{ت}_{٠,٩٧٥\text{، }٣} = ٣,١٨$$

وذلك من الجدول رقم (٥)

$$\hat{\text{أ}} = ٢,١$$

$$\text{MSE} = ٠,٦٣٣$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\text{أ}}} = \sqrt{\frac{٠,٦٣٣}{١٠}} = ٠,٢٥١٦$$

$$\hat{\text{ب}} = ٢,٧$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\text{ب}}} = \sqrt{٠,٦٣٣ \left\{ \frac{١}{٥} + \frac{٣^{٢}}{١٠} \right\}} = ٠,٨٣٤٥$$

بالتعويض في (١٠٥ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$$٢,١ - ٣,١٨ \times ٠,٢٥١٦ < \text{أ} < ٢,١ + ٣,١٨ \times ٠,٢٥١٦$$

$$٢,٧ - ٣,١٨ \times ٠,٨٣٤٥ < \text{ب} < ٢,٧ + ٣,١٨ \times ٠,٨٣٤٥$$

أي أن

$$١,٢٩٩٩ < \text{أ} < ٢,٩٠٠١$$

$$٠,٠٤٦٣ < \text{ب} < ٤,٣٥٣٧$$

أما في حالة النموذج الخطي العام (معادلة (٢٥ ـ ٢ ـ ٦)) فإن فترات الثقة المشتركة هي

$$\hat{\text{أ}}_{\text{ر}} - \text{ت}^{*}\hat{\sigma}_{\hat{\text{أ}}_{\text{ر}}} < \text{أ}_{\text{ر}} < \hat{\text{أ}}_{\text{ر}} + \text{ت}^{*}\hat{\sigma}_{\hat{\text{أ}}_{\text{ر}}} \qquad (١٠٦ - ٢ - ٦)$$

حيث $\text{ت}^{*} = \text{ت}_{1 - \frac{\alpha}{٢ \times \text{م}}\text{، ن} - \text{و}}$ ، و عدد معالم النموذج، م عدد المعالم التي نريد أن نكوّن لها فترات ثقة مشتركة.

وبالرجوع إلى بيانات التمرين التوضيحي ٢، وإذا كان المطلوب تكوين فترات ثقة مشتركة للمعالم

$\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، فإن

$$\hat{\text{أ}}_{١} = ٤٠$$

$\hat{أ}_{٢} = ٤$

$ت^{*} = ٣,١٨$

$MSE = ٢٢٠$

$\hat{\sigma}_{أ_{١}} = \sqrt{٢٢٠ \times ٠,٥٠} = \sqrt{١١٠} = ١٠,٤٨٨١$

$\hat{\sigma}_{أ_{٢}} = \sqrt{٢٢٠ \times ٠,٢٠٠} = \sqrt{٤٤} = ٦,٦٣٣٣$

وبالتعويض في (١٠٦ ـ ٢ ـ ٦) فإن

$٤٠ - ٣,١٨ \times ١٠,٤٨٨١ < أ_{١} < ٤٠ + ٣,١٨ \times ١٠,٤٨٨١$

$٤ - ٣,١٨ \times ١٠,٦٣٣٣ < أ_{٢} < ٤ + ٣,١٨ \times ٦,٦٣٣٣$

أي أن

$٦,٦٤٧٨ < أ_{١} < ٧٣,٣٥٢٢$

$-١٧,٠٩٣٩ < أ_{٢} < ٢٥,٠٩٣٩$

## أسئلة وتمارين (٦)

(٦ - ١) إذا كانت $س_١$، $س_٢$، . . . $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة من مجتمع توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^٢$، وعرّفنا المقدّرات التالية:

$$\hat{\mu}_١ = \frac{١}{٣} (س_١ + س_٢ + س_٣)$$

$$\hat{\mu}_٢ = أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + . . + أ_ن س_ن$$

$$\text{حيث } \sum_{ر=١}^{ن} أ_ر = ١$$

$$\hat{\mu}_٣ = \frac{١}{٤} س_١ + \frac{س_٢ + س_٣ + . . . س_{ن-١}}{٢ (ن - ٢)} + \frac{١}{٤} س_ن$$

أثبت أن $\hat{\mu}_١$ ، $\hat{\mu}_٢$ ، $\hat{\mu}_٣$ مقدرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع $\mu$.

(٦ - ٢) إذا كانت $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . $س_ن$ عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مأخوذة من مجتمع منتظم بدالة كثافة احتمال:

$$ح (س ؛ \theta) = \frac{١}{\theta} \qquad صفر \leqslant س \leqslant \theta$$

$$= صفر \qquad \text{فيما عدا ذلك}$$

أثبت أن:

$\hat{\theta}_١ = ٢ \bar{س}$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\theta$.

وإذا علم أن دالة كثالة الاحتمال للقيمة الكبرى في العينة ($س_{(ن)}$) هي:

$$ح_ن (س ؛ \theta) = \frac{ن س^{ن-١}}{\theta^ن} \qquad صفر \leqslant س \leqslant \theta$$

$$= صفر \qquad \text{فيما عدا ذلك}$$

أثبت أن:

$\hat{\theta}_٢ = \left(\frac{ن + ١}{ن} س_{(ن)}\right)$ مقدّر غير متحيز للمعلمة $\theta$.

(٣ - ٦) بالإشارة إلى تمرين (٢ - ٦)، أوجد كفاءة المقدّر $\hat{\theta}_1$ بالنسبة للمقدّر $\hat{\theta}_2$.

(٤ - ٦) إذا كانت س١، س٢، . . .، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^2$، أثبت أن:

$$\hat{\sigma}_1^2 = ع^2 = \frac{1}{ن - 1} \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \tfrac{1}{2} (س_1 - س_2)^2$$

غير متحيزين للمعلمة $\sigma^2$، ثم أوجد كفاءة $\hat{\sigma}_1^2$ بالنسبة إلى $\hat{\sigma}_2^2$.

(٥ - ٦) إذا كانت س١، س٢، . . .، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$ح (س؛ \theta) = \frac{2 س}{\theta} هـ^{-س^2/\theta}، س > صفر$$

= صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2$ مقداراً كافياً للمعلمة $\theta$.

(٦ - ٦) إذا كانت س١، س٢، . . .، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع بواسوني، أثبت أن $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ مقداراً كافياً لمعلمة هذا التوزيع، ثم أثبت أن هذا المقدّر غير متحيز.

(٧ - ٦) إذا كانت س١، س٢، . . .، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$ح (س ؛ \theta) = \theta\, س^{\theta - 1} \qquad صفر \leqslant س \leqslant 1$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أثبت أن $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن}$ مقداراً متسقا لـ $\frac{\theta}{\theta + 1}$.

(٨ - ٦) إذا كانت س١، س٢، . . .، سن عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة مختارة من مجتمع معتاد توقعه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$، ص١، ص٢،

... $ص_ن$ عينة عشوائية من المشاهـدات المستقلة مختارة من مجتمـع آخر معتاد توقعه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ وإذا علم أن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ أثبت أن:

$$\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \overline{س})^2 + \sum_{ر=1}^{ن}(ص_ر - \overline{ص})^2}{2ن - 2}$$

مقدّراً متسقا للمعلمة $\sigma^2$.

(٦ - ٩) إذا كـانت $س_1$ ، $س_2$ ، ... $س_ن$ عينـة عشـوائيـة من المشـاهـدات المستقلة مأخوذة من مجتمع ذي الحدين بـدالة كثـافة احتـمال تعتمد عـلى المعلمة ح، أوجـد مقداراً للمعلمة ح بطريقة العزوم.

(٦ - ١٠) إذا كـانت $س_1$ ، $س_2$ ، ... $س_ن$ عينـة عشـوائيـة من المشـاهـدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$ح(س ؛ \theta) = \frac{1}{\theta} \qquad صفر < س < \theta$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أوجد مقدًر الامكان الأكبر للمعلمة $\theta$.

(٦ - ١١) إذا كـانت $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ عينة عشـوائيـة من المشاهـدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$ح(س ؛ \theta) = 2\theta\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\, س^2\, هـ^{-\theta س^2} \qquad -\infty < س < \infty$$

أوجد مقدّر الامكان الأكبر للمعلمة $\theta$.

(٦ - ١٢) إذا كـانت $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ عينـة من المشـاهـدات المستقلة مأخوذة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$ح(س ؛ \theta) = \frac{1}{\theta}\, هـ^{-\frac{س}{\theta}} \qquad س > صفر ، \theta > صفر$$

$$= صفر \qquad فيما عدا ذلك$$

أوجـد مقدّري العزوم والامكان الأكبر للمعلمة $\theta$، ثم أثبـت أن $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ مقدّر كاف لهذه المعلمة.

(٦ - ١٣) إذا كان المتغيران س ، ص يرتبطان بالعلاقة الخطية التالية:

ص = أ س + ب + خ

حيث خ خـطأ عشوائي يتبـع التوزيـع الطبيعي بتـوقع صفـر وتبـاين $\sigma^2$

(كمية غير معلومة)، أوجد مقدر الامكان الأكبر لكل من أ، ب، $\sigma^2$،
ثم بيّن ما إذا كانت هذه المقدّرات متحيزة أو غير متحيزة.

(٦ - ١٤) إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع ص وعدد من المتغيرات المستقلة
$س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_و$ على النحو التالي:

$ص = أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + . . . + أ_و س_و + خ$

حيث خ خطأ عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع صفر وتباين $\sigma^2$
(كمية غير معلومة)، بيّن كيف يمكن إيجاد مقدّرات الإمكان الأكبر
لثوابت النموذج $أ_١$ ، $أ_٢$ ، . . . ، $أ_و$ والتباين $\sigma^2$.

(٦ - ١٥) إذا كان المتغيران س ، ص يرتبطان بالعلاقة المحددة بالنموذج:
ص = أ س + ب + خ، حيث خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه $\sigma^2$
(كمية غير معلومة) وكان لدينا أزواج القيم:

| س | ص |
|---|---|
| ١ | ١ |
| ٣ | ٢ |
| ٤ | ٤ |
| ٦ | ٤ |
| ٨ | ٥ |
| ٩ | ٧ |
| ١١ | ٨ |
| ١٤ | ٩ |

المطلوب:

١ - تقدير ثوابت النموذج أ، ب

٢ - حساب متوسط مجموع مربعات الأخطاء (MSE) وبيان ما إذا كان MSE مقدراً غير متحيز للمعلمة $\sigma^2$ أم لا.

٣ - حساب كل من التفاوت الكلي والتفاوت غير المفسّر والتفاوت المفسّر والتحقق حسابياً من صحة العلاقة (٤٥ - ٢ - ٦).

٤ - تقدير تباين كل من مقدّري أ، ب.

(١٦ ـ ٦) إذا كان المتغيران س، ص يرتبطان بالعلاقة ص = أ س + ب + خ حيث خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه $\sigma^2$ (غير معلوم)، وأخذنا على هذين المتغيرين عينة عشوائية من أزواج القيم (سر ، صر) حجمها ٢٠ مفردة. فإذا حصلنا من هذه العينة على النتائج التالية:

مجـ ص = ٢٢

مجـ س = ١٨٦

مجـ (ص − $\overline{\text{ص}}$)$^2$ = ٨٦

مجـ (س − $\overline{\text{س}}$)$^2$ = ٢١٥

مجـ (س − $\overline{\text{س}}$) (ص − $\overline{\text{ص}}$) = ١٠٦

والمطلوب:

١ ـ تقدير المعلمتين أ، ب

٢ ـ حساب كل من التفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسر.

٣ ـ تقدير التباين $\sigma^2$.

٤ ـ تقدير تباين كل من مقدّريْ أ، ب.

(١٧ ـ ٦) إذا علم أن العلاقة بين الأجر الشهري بالدينار (ص) في مؤسسة معينة ومدة الخدمة بالسنوات (س) في هذه المؤسسة هي خطية بسيطة واخترنا عشوائياً عشرة أشخاص من العاملين في هذه المؤسسة، وحصلنا من العينة على النتائج التالية:

مجـ س = ٥٠

مجـ ص = ١٥٠

مجـ س$^2$ = ٤١٠

مجـ ص$^2$ = ٢٦١٠

مجـ س ص = ٩٧٤

والمطلوب:

١ ـ تقدير ثوابت وتباين النموذج.

٢ ـ حساب كل من التفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسّر.

٣ ـ تقدير تباين كل من مقدّري ثابتي النموذج.

(١٨ ـ ٦) الجدول التالي يعطي ١٢ قيمة للمتغير التابع ص والمتغير المستقل س:

| ص: | ١٢٨ | ٢١٣ | ١٨٦ | ١٧٨ | ٢٥٠ | ٤٤٦ | ٥٤٠ | ٤٥٧ | ٣٢٤ | ١٧٧ | ٧٥ | ١٠٣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س: | ٧ | ١٢ | ١٠ | ١٠ | ١٤ | ٢٥ | ٣٠ | ٢٥ | ١٨ | ١٨ | ٤ | ٦ |

والمطلوب:

١ ـ توفيق نموذج خطي بسيط للبيانات المعطاة.

٢ ـ تقدير قيمة ص إذا علم أن س = ٢٢.

٣ ـ تقدير تباين النموذج الموفّق

٤ ـ تقدير تباين كل من مقدّري ثابتي النموذج.

(١٩ ـ ٦) يعتقد بأن العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين $س_١$، $س_٢$ هي على النحو التالي:

$$ص = أ_. + أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + خ$$

حيث خ خطأ عشوائي توقعه صفر وتباينه $\sigma^٢$ (غير معلوم).

فإذا حصلنا من عينة عشوائية حجمها ١٢ قراءة على المعلومات التالية:

| ص: | ٦٤ | ٧١ | ٥٣ | ٦٧ | ٥٥ | ٥٨ | ٧٧ | ٥٧ | ٥٦ | ٥١ | ٧٦ | ٦٨ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $س_١$: | ٥٧ | ٥٩ | ٤٩ | ٦٢ | ٥١ | ٥٠ | ٥٥ | ٤٨ | ٥٢ | ٤٢ | ٦١ | ٥٧ |
| $س_٢$: | ٨ | ١٠ | ٦ | ١١ | ٨ | ٧ | ١٠ | ٩ | ١٠ | ٦ | ١٢ | ٩ |

أثبت باستخدام المصفوفات أن النموذج الخطي العام المقدّر هو على الشكل التالي:

$$\hat{ص} = ٣,٦٥٠ + ٠,٨٥٥ س_١ + ١,٥٠٦ س_٢$$

ثم أوجد كلا من التفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسر وقدّر التباين $\sigma^٢$.

(٢٠ ـ ٦) إذا علم أن خط انحدار ص على س المقدّر بطريقة المربعات الصغرى هو:

$$\hat{ص} = ٠,٤٧٦ س + ٣٥,٨٢$$

وإذا علم أن

مجـ س = ٨٠٠

مجـ س^٢ = ٥٣٦١٨

مجـ (ص − ص^)^٢ = ١٩,٧٠٤

وعدد أزواج القيم ن = ١٢

احسب متوسط مجموع مربعات الأخطاء، ثم قدّر تباين كل من مقدّري ثابتي النموذج.

(٢١ ـ ٦) في دراسة لمعرفة العلاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين س١، س٢ حصلنا على البيانات التالية:

| ص | س١ | س٢ |
|---|---|---|
| ٦٤ | ٤ | ٢ |
| ٨١ | ٤ | ٦ |
| ٧٢ | ٦ | ٢ |
| ٩١ | ٦ | ٦ |
| ٨٣ | ٨ | ٢ |
| ٩٦ | ٨ | ٦ |

فإذا افترضنا النموذج الخطي العام بخطأ عشوائي معتاد توقعه صفر وتباينه $\sigma^2$ (غير معلومة)، استخدم طريقة المصفوفات لتقدير معالم هذا النموذج والتباين $\sigma^2$. أوجد متجه الأخطاء أو البواقي Residuals، ثم احسب كلا من التفاوت الكلي والتفاوت غير المفسّر والتفاوت المفسّر.

(٢٢ ـ ٦) إذا كانت لدينا البيانات عن عدد سيارات التكسي (س) التي تعمل في أحد المكاتب والأجور المتحصلة (ص) بالمئة دينار لكل عدد:

| عدد السيارات (س) | الأجور المتحصلة (ص) |
|---|---|
| ١ | ٥٠ |
| ٢ | ٦٠ |
| ٣ | ٦٥ |
| ٤ | ٧٥ |
| ٥ | ٨٠ |
| ٦ | ٨٣ |
| ٧ | ٨٦ |

والمطلوب توفيق النموذج الخطي البسيط للبيانات السابقة وحساب متجه الأخطاء أو البواقي Residuals والتفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسّر ثم تقدير تباين النموذج

(٦ - ٢٣) البيانات في الجدول التالي تبين حجم المبيعات الأسبوعية (ص) بالألف دينار في السوق التجاري وعدد الأسواق التجارية (س١) وعدد السكان (س٢) في عشر مدن:

| ص | س١ | س٢ |
|---|---|---|
| ٥ | ٢ | ١٠ |
| ٢٠ | ٢ | ١٥ |
| ١٥ | ٣ | ٢٥ |
| ٢٥ | ٣ | ٣٠ |
| ٥٠ | ٤ | ٦٠ |
| ١٦ | ١ | ٢٥ |
| ١٠ | ٢ | ١٣ |
| ٨ | ١ | ٧ |
| ٣٥ | ٣ | ٤٠ |
| ٤٠ | ٥ | ٥٥ |

والمطلوب توفيق النموذج الخطي العام للبيانات السابقة وحساب قيمة الأخطاء أو البواقي والتفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسّر وتقدير تباين النموذج.

(٦ - ٢٤) اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٢١ أسرة من بين الأسر التي تسكن في منطقة معينة وقد تبينّ أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية للأسر في العينة كما يلي:

| فئات الدخل عدد الأسر | الشهري بالدينار |
|---|---|
| ١٠٠ - ٢٠٠ | ١٠ |
| ٢٠٠ - ٣٠٠ | ١٩ |
| ٣٠٠ - ٤٠٠ | ٦٤ |
| ٤٠٠ - ٥٠٠ | ١٧ |
| ٥٠٠ - ٦٠٠ | ١١ |
| المجموع | ١٢١ |

والمطلوب

١ - ايجاد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط الدخل الشهري للأسرة في هذه المنطقة

٢ - ايجاد فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة الأسر في هذه المنطقة والتي يقل دخلها الشهري عن ٣٠٠ دينار.

(٢٥ - ٦) لتقدير متوسط وزن الطفل عند الولادة أخذت عينة عشوائية من ١٦ طفل فكان متوسط الوزن لهذه العينة ٣ كغم. فإذا علم من خبرة سابقة أن الإنحراف المعياري لوزن الطفل عند الولادة هو ٠,٥ كغم، قدّر متوسط وزن الطفل عند الولادة بفترتي ثقة ٩٥٪، ٩٩٪.

(٢٦ - ٦) في إحدى الدراسات الميدانية اختيرت عينة عشوائية طبقية متناسبة من الأسر التي تسكن في مدينة معينة وذلك بحيث يتناسب حجم العينة المختارة من كل حي مع عدد أسر الحي وحجم العينة يساوي ١٪ من حجم المجتمع وقد حصلنا من هذه الدراسة على المعلومات المبيّنة في الجدول التالي:

| الحي | عدد الأسر في الحي | عدد الأسر في العينة من كل حي | مجموع الدخول الشهرية للأسر بالدينار | مجموع مربعات انحرافات الدخول الشهرية عن عن متوسط عينة الحي |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ٢٥٠٠ | ٢٥ | ٢٠٠٠ | ١٩٤٤ |
| ٢ | ٥٧٠٠ | ٥٧ | ٣٩٩٠ | ٦٠٥٦ |
| باقي الأحياء (٣) | ١٦٨٠٠ | ١٦٨ | ٦٢٦٠ | ٥٥٧٦٤ |
| المجموع | ٢٥٠٠٠ | ٢٥٠ | ١٢٢٥٠ | ٦٣٧٦٤ |

إذا افترضت أن توزيع الدخل، في كل من أحياء المدينة، يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu_r$ وتباين $\sigma_r^2$ (ر = ١ ، ٢ ، ٣):

١ - اعتماداً على بيانات الحي الأول فقط، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط دخل الأسرة في ذلك الحي.

٢ - اعتماداً على بيانات الحي الثاني فقط، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط دخل الأسرة في ذلك الحي.

٣ - اعتماداً على بيانات جميع الأحياء، أوجد فترة ثقة ٩٩٪ لمتوسط دخل الأسرة في هذه المدينة.

٤ ـ بافتراض أن تباين دخول الأسر، في كل من الحي الأول والحي الثاني متساوٍ، أوجد أفضل تقدير لهذا التباين مستخدماً بيانات الحي الأول والثاني، ثم أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين متوسط دخل الأسرة في الحي الأول ($\mu_1$) ومتوسط دخل الأسرة في الحي الثاني ($\mu_2$)

(٢٧ ـ ٦) اخذت عينة عشوائية بسيطة مكونة من ١٢١ عامل في مصنع كبير وحسب إنتاج العامل في العينة عند استخدامه طريقة انتاجية معينة، فوجد أن توزيع الإنتاج كما يلي:

| فئات الإنتاج اليومي بالقطعة | عدد العمال |
|---|---|
| ٤٠ ـ ٤٨ | ٩ |
| ٤٨ ـ ٥٦ | ٢٣ |
| ٥٦ ـ ٦٤ | ٥٨ |
| ٦٤ ـ ٧٢ | ٢١ |
| ٧٢ ـ ٨٠ | ١٠ |
| المجموع | ١٢١ |

والمطلوب

أولاً من بيانات العينة السابقة، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط الانتاج اليومي للعامل في المصنع باستخدام الطريقة الإنتاجية السابقة.

ثانياً سجلت بيانات عن إنتاج عمال نفس العينة عند استخدامهم طريقة انتاجية ثانية وحسبت من هذه البيانات المقاييس الإحصائية التالية: الوسط الحسابي للإنتاج اليومي للعامل في العينة بالطريقة الثانية = ٦٥,٢ قطعة.

تباين الإنتاج اليومي للعامل في العينة بالطريقة الثانية = ٥٧ (قطعة)$^2$

أوجد

١ - أفضل تقدير لتباين الإنتاج اليومي للعامل من بيانات العينتين بافتراض أن تباين الانتاج في مجتمع الدراسة لا يتغير باستخدام العامل لأي من الطريقتين.

٢ - فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين متوسط الانتاج اليومي للعامل في المصنع عند استخدامه للطريقة الثانية وبين متوسط الإنتاج اليومي للعامل في المصنع عند استخدامه للطريقة الأولى بافتراض عدم تأثير انتاج العامل بطريقة معينة على انتاجه بالطريقة الأخرى.

(٢٨ ـ ٦) اختارت شركة لتجميع أجهزة التلفزيون عينة عشوائية من شاشات التلفزيون حجمها ٢٥ وحدة فوجدت أن متوسط الخدمة لهذه العينة هو ١٢٠٠ ساعة، فإذا كان تباين مدة الخدمة لهذا النوع من الشاشات هو ١٦٠٠ (ساعة)$^{٢}$، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط خدمة شاشات التلفزيون.

(٢٩ ـ ٦) إذا كان طول الطالب في الجامعة الأردنية يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^{٢}$، وهما غير معلومتين، وأخترنا عينة عشوائية حجمها ٢٥ من طلاب الجامعة وكانت أطوالهم كما هو مبيّن في الجدول التكراري التالي:

| طول الطالب بالسنتمتر | عدد الطلاب |
|---|---|
| ١٥٠ - | ١ |
| ١٥٥ - | ٣ |
| ١٦٠ - | ٤ |
| ١٦٥ - | ٦ |
| ١٧٠ - | ٥ |
| ١٧٥ - | ٤ |
| ١٨٠ - ١٨٥ | ٢ |
| المجموع | ٢٥ |

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط طول الطالب في الجامعة الأردنية.

(٣٠ ـ ٦) حدد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط الأجر السنوي في مؤسسة معينة

في حدود ± ٢٠٠ دينار بدرجة ثقة ٩٥٪ إذا علم أن الانحراف المعياري للأجر السنوي للعامل الواحد في هذه المؤسسة هو ١٠٠٠ دينار.

(٦ - ٣١) حدّد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط عدد الركاب في الرحلة الواحدة الذين تنقلهم شركة للباصات في حدود ± ٢ مسافر بدرجة ثقة ٩٥٪ إذا علم من الرحلات السابقة أن الانحراف المعياري يساوي ٦ مسافرين لكل رحلة

(٦ - ٣٢) إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها ١٠٠ شخص من منطقة ما ووجدنا أن ٦٤٪ منهم يوافقون على رأي معين، أحسب فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة الأشخاص الذين يوافقون على هذا الرأي في المنطقة المذكورة.

(٦ - ٣٣) في مسح لاتجاهات المستهلكين ورغباتهم في بلد معين، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٥٠ شخصاً ووجد أن من بينهم ٣٠ شخصاً يرغبون في شراء سيارة من نوع معين، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لنسبة الأشخاص الذي يرغبون في شراء هذا النوع من السيارات في البلد المذكور.

(٦ - ٣٤) إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص من الذين أعمارهم ١٨ ـ ٦٠ سنة في مدينة ما ووجدنا أن ٢٠٪ منهم أميّين، قدّر نسبة الأميّين في هذه المدينة بفترة ثقة ٩٩٪.

(٦ - ٣٥) إذا كان عدد المدخنين في عينة عشوائية حجمها ٣٢٠ من طلاب المدارس الثانوية هو ٨٠ وعدد المدخنين في عينة عشوائية حجمها ٣٠٠ من طلاب الجامعة الأردنية هو ١٥٠، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ للفرق بين نسبة المدخنين في المرحلة الثانوية ونسبة المدخنين في الجامعة الأردنية.

(٦ - ٣٦) إذا أرادت وزارة العمل والتنمية الإجتماعية تقدير نسبة العاطلين عن العمل في المملكة في حدود ± ٠,٠٠٤ بدرجة ثقة ٩٥٪، فما هو حجم العينة اللازم لتحقيق ذلك إذا كان من المتفق عليه في الوزارة أن هذه النسبة حوالي ٠,٠٩؟

(٦ - ٣٧) إذا فرضنا أن نسبة المستهلكين الذين يفضلون نوعاً معيناً من الأسماك تقع بين ٠,٢٠ و ٠,٦٠، حدّد حجم العينة اللازم لتقدير هذه النسبة في حدود ± ٠,٠٤ بدرجة ثقة ٠,٩٠

(٦ - ٣٨) اختيرت عينة عشوائية عدد مفرداتها ٢٥ أسرة من بين الأسر التي تقطن في مدينة معينة، وقد تبيّن أن التوزيع التكراري للدخول الشهرية لأسر هذه العينة كما يلي:

| فئات الدخل الشهري بالدينار | عدد الأسر |
|---|---|
| ١٠٠ - ٢٠٠ | ٢ |
| ٢٠٠ - ٣٠٠ | ٧ |
| ٣٠٠ - ٤٠٠ | ١١ |
| ٤٠٠ - ٥٠٠ | ٤ |
| ٥٠٠ - ٦٠٠ | ١ |
| المجموع | ٢٥ |

فإذا علم أن الدخل الشهري للأسرة الواحدة يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu$ وبتباين $\sigma^2$ حيث $\mu$ ، $\sigma^2$ غير معلومتين، أوجد

١ - فترة ثقة ٩٥٪ لمتوسط الدخل الشهري للأسرة الواحدة في هذه المدينة

٢ - فترة ثقة ٩٩٪ لتباين الدخل في هذه المدينة

(٦ - ٣٩) إذا كانت أعمار خمسة من أعضاء هيئة التدريس في كلية معينة هي ٣٩، ٥٥، ٦٠، ٥٩، ٤٤، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لتباين الأعمار لجميع أعضاء هيئة التدريس في هذه الكلية إذا علم أن الأعمار تتبع التوزيع الطبيعي.

(٦ - ٤٠) إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ٢١ من المهندسين العاملين لدى شركة معينة، احسب فترة ثقة ٩٠٪ لتباين عدد ساعات العمل الأسبوعي لجميع المهندسين إذا علم أن الإنحراف المعياري لعدد ساعات العمل الأسبوعي هو ٨ ساعات وأن عدد ساعات العمل يتبع التوزيع الطبيعي.

(٦ - ٤١) الجدول المزدوج التالي يبيّن توزيع ٥٠ طالباً من طلاب الجامعة الأردنية حسب الطول بالسنتمتر (س) والوزن بالكيلوغرام (ص):

| الوزن (ص) / الطول (س) | ٥٠ - | ٥٥ - | ٦٠ - | ٦٥ - | ٧٠ - | ٧٥ - | ٨٠ - ٨٥ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١٥٥ - | ١ | | ٢ | | | | | ٣ |
| ١٦٠ - | ١ | ٢ | ٣ | | ١ | | | ٧ |
| ١٦٥ - | ١ | ٢ | ٨ | ٥ | ١ | | | ١٧ |
| ١٧٠ - | | | ١ | ٣ | ٤ | ٢ | | ١٠ |
| ١٧٥ - | | | | ٢ | ٢ | ٤ | | ٨ |
| ١٨٠ - ١٨٥ | | | | | | ١ | ٤ | ٥ |
| المجموع | ٣ | ٤ | ١٤ | ١٠ | ٨ | ٧ | ٤ | ٥٠ |

أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمعامل الارتباط بين الطول والوزن

(٦ - ٤٢) إذا وجد أن معامل ارتباط بيرسون بين العمر (س) وضغط الدم (ص) لعينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص هو ٠,٨٠، أوجد فترة ثقة ٩٩٪ لمعامل الارتباط ($\rho$) بين العمر وضغط الدم.

(٦ - ٤٣) إذا وجد أن معامل ارتباط بيرسون بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار الجملة لمجموعة من السلع خلال السنوات ١٩٧٥ - ١٩٨٤ هو ٠,٩٠، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لمعامل الارتباط بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار الجملة.

(٦ - ٤٤) بالإشارة إلى بيانات التمرين (١٥ - ٦)، أوجد فترة ثقة ٩٥٪ لكل من أ ، ب

(٦ - ٤٥) بالإشارة إلى بيانات التمرين (١٦ - ٦)، أوجد فترة ثقة ٩٩٪ لكل من أ ، ب

(٦ - ٤٦) بالرجوع إلى تمرين (١٧ - ٦)، أوجد فترة ثقة ٩٠٪ لكل من أ ، ب

(٦ - ٤٧) استخدم بيانات التمرين (١٩ - ٦) في ايجاد فترة ثقة ٩٥٪ لكل من أ. ، أ$_١$ ، أ$_٢$ ، ثم أوجد فترة ثقة مشتركة ٩٠٪ للمعلمتين أ$_١$ ، أ$_٢$.

(٦ - ٤٨) استخدم بيانات التمرين (٢١ - ٦) في ايجاد فترة ثقة ٩٩٪ لكل من أ. ، أ$_١$ ، أ$_٢$ ، ثم أوجد فترة ثقة مشتركة ٩٠٪ للمعلمتين أ. ، أ$_١$.



# الباب السابع

## اختبار الفروض Hypothesis Testing

الاختبارات الإحصائية تقسم إلى

١ ـ اختبارات معلمية Parametric Tests حيث أن توزيع المشاهدات له شكل معيّن ومعروف.

٢ ـ اختبارات غير معلمية Non-Parametric Tests حيث أن توزيع المشاهـدات غير معروف.

# الفصل الأول

## الاختبارات المعلمية

### (٧ - ١ - ١) مقدمة

لقد درسنا في الباب السادس طرق تقدير معلمة (أو معالم) مجتمع معيّن من بيانات عينة عشوائية سواء منها التقدير بنقطة أو التقدير بفترة ثقة. ونركز اهتمامنا في هذا الباب على معرفة ما إذا كانت قيمة مفترضة لمعلمة المجتمع مقبولة أم لا في ضوء مجموعة من المشاهدات Observations أو دليل العينة Sample Evidence المشتق من هذه المشاهدات، وبعبارة أخرى فإننا نختبر صحة إدعاء يتعلق بمعلمة أو معالم المجتمع وذلك بالاعتماد على بيانات العينة العشوائية.

ويجب التمييز في هذا المجال بين الفرضيات الإحصائية والفرضيات العلمية بشكل عام، حيث أن الفرضيات الإحصائية تتعلق بالمتغيرات العشوائية التي يمكن مشاهدتها. فإذا فرضنا مثلاً أن متوسط مجتمع معتاد $\mu$ = ٥٠، أو أن نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج مصنع معين ح = ٠,٠٢ أو أن تباين مجتمع معتاد $\sigma^2$ = ١٠٠ فهذه جميعاً فرضيات إحصائية تتضمن بعض خصائص فراغ المعاينة يمكن ترجمتها إلى فرضيات تتعلق بهذا الفراغ واختبار صحتها بمقارنة القيم المحددة في هذه الفرضيات بدليل العينة المشتق من مجموعة المشاهدات المختارة من مجتمع الدراسة.

### (٧ - ١ - ٢) الفرض العدمي والفرض البديل Null Hypothesis and Alternative Hypothesis

في كل اختبار تجريه يوجد فرضان: الفرض العدمي ونرمز له بالرمز $H_0$ والفرض البديل ونرمز له بالرمز $H_1$. فإذا كان:

$H_0$ : $\mu$ = ٥٠

$H_1$ : $\mu \neq$ ٥٠

فإن الفرض العدمي يعني أن متوسط مجتمع معين يساوي ٥٠ والفرض البديل يعني أن متوسط المجتمع لا يساوي ٥٠.

وإذا كان

$H_0$ : p ≥ ٠,٠٢

$H_1$ : p < ٠,٠٢

فإن الفرض العدمي يعني أن نسبة المفردات التي تحمل صفة معينة في مجتمع ما أقل من أو تساوي ٠,٠٢ والفرض البديل يعني أن هذه النسبة أكبر من ٠,٠٢

وفي كثير من الأحيان نستخدم كلمة الفرض للدلالة على الفرض العدمي.

### (٣ - ١ - ٧) الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني

### Type I Error and Type II Error

إننا نستخدم دليل العينة Sample Evidence لاختبار صحة الفرض العدمي، وحيث أن العينة جزء من كل فإن هناك امكانية رفض الفرض العدمي عندما يكون صحيحاً وأيضاً إمكانية قبوله عندما يكون خاطئاً. فعندما نرفض Reject الفرض مع أنه صحيح True فإننا نقع في خطأ من النوع الأول Type I Error ونرمز له بالرمز $\alpha$ وتلفظ ألفا، وعندما نقبل Accept الفرض مع أنه خاطىء False فإننا نقع في خطأ من النوع الثاني Type II Error ونرمز له بالرمز $\beta$ وتلفظ بيتا. وقد جرت العادة على تسمية $\alpha$ باحتمال الخطأ من النوع الأول Probability of Type I Error أو مستوى المعنوية Level of Significance $\beta$ باحتمال الخطأ من ا لنوع الثاني Probability of Type II Error

ويمكن تلخيص نتائج اختبار فرض معين في جدول على النحو التالي:

| | | حالة الطبيعة State of Nature | |
|---|---|---|---|
| | | الفرض العدمي صحيح | الفرض العدمي خاطىء |
| القرار Decision | قبول الفرض العدمي | قرار صحيح | خطأ من النوع الثاني $\beta$ |
| | رفض الفرض العدمي (عدم قبوله) | خطأ من النوع الأول $\alpha$ | قرار صحيح |

ونرغب في جميع الأحوال أن نجعل كلاً من $\alpha$ ، $\beta$ أقل ما يمكن، ولكن في حالة ثبات حجم العينة فإن أي انخفاض في قيمة أحد الاحتمالين يؤدي إلى ارتفاع في قيمة الآخر ولا يمكن تقليل الاحتمالين معاً إلّا بزيادة حجم العينة.

### (٤ - ١ - ٧) كيفية إجراء الاختبار باستخدام الدالة الاختبارية:

**مناطق القبول والرفض** Acceptance and Regection Regions

وقاعدة اتخاذ القرار Decision Rule

إن إجراء أي اختبار باستخدام الدالة الاختبارية يتم حسب الخطوات التالية:

١ - صياغة الفرضين العدمي والبديل وذلك على النحو التالي:

أ - اختبارات ذات طرفين Two-Tailed Tests

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0 \qquad (٧ - ١ - ١)$$

ب - اختبارات ذات طرف واحد One-Tailed Tests

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$

$$H_1 : \theta > \theta_0 \qquad (٧ - ١ - ٢)$$

ويسمى اختبار الطرف العلوي Upper-Tailed Test

$$H_0 : \theta \geq \theta_0$$

$$H_1 : \theta < \theta_0 \qquad (٧ - ١ - ٣)$$

ويسمى اختبار الطرف السفلي Lower-Tailed Test

٢ - تحديد مستوى المعنوية $\alpha$ حيث يمكن أن تكون $\alpha$ أية قيمة في المدى (صفر، ١) ولكن القيم التي تستخدم غالباً في الفرضيات الإحصائية هي $\alpha$ = ٠,٠١ ، $\alpha$ = ٠,٠٥

٣ - تحديد المقدّر غير المتحيز Unbiased Estimator والمناسب للمعلمة $\theta$ وليكن $\hat{\theta}$

٤ - تحديد الدالة الاختبارية Test Statistic التي تستخدم في اختبار الفرض، وتعرف هذه الدالة بشكل عام، على النحو التالي:

$$\text{الدالة الاختبارية} = \frac{\text{المقدّر} - \text{القيمة المتوقعة للمقدّر}}{\text{الانحراف المعياري للمقدّر}} \qquad (٧ - ١ - ٤)$$

٥- تحديد توزيع المعاينة للدالة الاختبارية

٦ - التعويض في الدالة الإختبارية بقيمة المقياس الإحصائي المحسوب من بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع الدراسة وقيمة الإنحراف المعياري (معروفة لدى الباحث من خبرة سابقة أو مقدّرة من بيانات العينة) والقيمة المتوقعة للمقياس الإحصائي تحت الفرض العدمي.

٧ - استخراج قيمة من جدول توزيع المعاينة المحدد في خطوة ٥ وبمستوى معنوية $\alpha$ المحدد في خطوة ٢.

٨ - تحديد منطقتي القبول والرفض وبالتالي قبول الفرض أو عدم قبوله بناء على المقارنة بين القيمة المحسوبة في الخطوة ٦ والقيمة الجدولية المستخرجة في خطوة ٧.

ونوضّح الخطوات السابقة بالمثال التالي:

إذا كان سعر سلعة ما في أحد الأسواق خلال يوم معيّن يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu$ (كمية غير معلومة) وتباين $\sigma^2$ يساوي ٢,٢٥ (دينار)$^2$ (معلومة من خبرة سابقة) وأخذنا عينة عشوائية حجمها ٢٥ من جميع الوحدات التي بيعت خلال ذلك اليوم وحصلنا منها على البيانات المبوبة في الجدول التالي:

| سعر الوحدة بالدينار | عدد الوحدات |
|---|---|
| ٣٢ | ١ |
| ٣٣ | ٧ |
| ٣٤ | ١٠ |
| ٣٥ | ٥ |
| ٣٦ | ٢ |
| المجموع | ٢٥ |

**المطلوب هو:**

أ - اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحدة المباعة في ذلك اليوم هو ٣٤,٥ دينار

ب ـ اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحدة المباعة في ذلك اليوم أقل من أو يساوي ٣٣,٥ دينار.

جـ ـ اختبار الفرض القائل بأن متوسط سعر الوحدة المباعة في ذلك اليوم أكبر من أو يساوي ٣٤,٥ دينار.

الحل

١ ـ يمكن صياغة الفرض في أ كما هو مبينّ في (١ ـ ١ ـ ٧)، والفرض في ب كما هو مبينّ في (٢ ـ ١ ـ ٧)، والفرض في جـ كما هو مبينّ في (٣ ـ ١ ـ ٧).

٢ ـ أفرض أن مستوى المعنوية $\alpha$ = ٠,٠٥ .

٣ ـ أن المقياس الإحصائي المناسب لتقدير متوسط مجتمع معتاد $\mu$ هوالوسط الحسابي للعينة $\overline{\text{س}}$ ويُحسب على النحو التالي:

| سعر الوحدة | عدد الوحدات | سعر الوحدة × عدد الوحدات |
|---|---|---|
| ٣٢ | ١ | ٣٢ |
| ٣٣ | ٧ | ٢٣١ |
| ٣٤ | ١٠ | ٣٤٠ |
| ٣٥ | ٥ | ١٧٥ |
| ٣٦ | ٢ | ٧٢ |
| المجموع | ٢٥ | ٨٥٠ |

$$\therefore \overline{\text{س}} = \frac{٨٥٠}{٢٥} = ٣٤$$

٤ ـ بالرجوع إلى (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن الدالة الاختبارية تعرف كما يلي:

$$\text{الدالة الاختبارية} = \frac{\overline{\text{س}} - \text{ت}(\overline{\text{س}})}{\sigma_{\overline{\text{س}}}}$$

$$= \frac{\overline{\text{س}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{\text{ن}}}}$$

٥ ـ إن توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي $\overline{\text{س}}$ هو معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\frac{\sigma^{٢}}{\text{ن}}$

وبالتالي فإن توزيع المعاينة للدالة الإختبارية هو معتاد قياسي (معتاد توقعه صفر وتباينه ١)

٦ ـ قيمة الدالة الاختبارية

$$= \frac{٣٤,٥ - ٣٤}{\frac{١,٥}{\sqrt{٢٥}}}$$

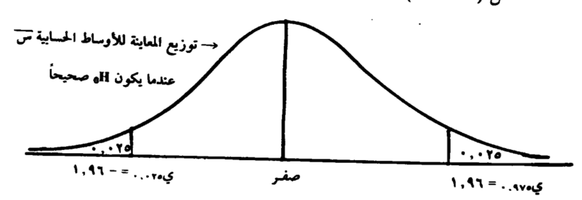
$$= \frac{- ٠,٥}{٠,٣}$$

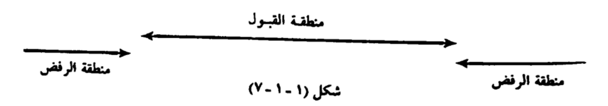
$$= - ١,٦٧$$

٧ ـ القيم الجدولية من جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) هي

| | | |
|---|---|---|
| $ي_{٠,٠٢٥}$ | = - ١,٩٦ ، $ي_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦ | في حالة الاختبار ذي الطرفين |
| $ي_{٠,٩٥}$ | = ١,٦٤٥ | في حالة اختبار الطرف العلوي |
| $ي_{٠,٠٥}$ | = - ١,٦٤٥ | في حالة اختبار الطرف السفلي |

٨ ـ في حالة الاختبار ذي الطرفين فإن مناطق القبول والرفض تحدد كما هو مبين في الشكل (١ ـ ١ ـ ٧)

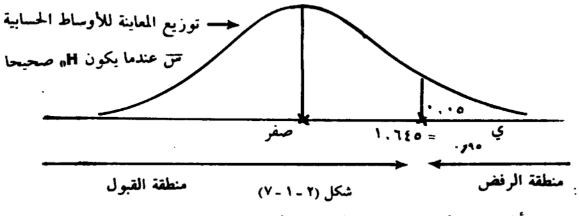



شكل (١ ـ ١ ـ ٧)

وحيث أن | -١,٦٧| < ١,٩٦ فإننا نقبل الفرض

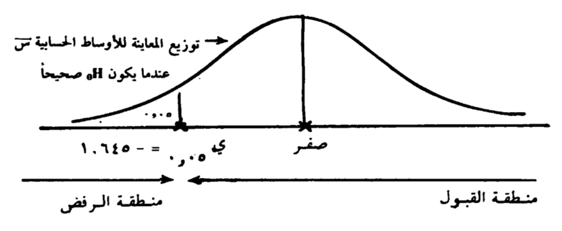
وفي حالة اختبار الطرف العلوي فإن مناطق القبول والرفض تحدد كما هو مبين في الشكل (٢ ـ ١ ـ ٧)



شكل (٢ ـ ١ ـ ٧)

وحيث أن ١,٦٧ > ١,٦٤٥ فإننا نرفض الفرض.

وفي حالة اختبار الطرف السفلي فإن مناطق القبول والرفض تحدّد كما هو مبيّن في الشكل (٣ ـ ١ ـ ٧).




شكل (٣ ـ ١ ـ ٧)

وحيث أن - ١,٦٧ < - ١,٦٤٥ فإننا نرفض الفرض

(٥ ـ ١ ـ ٧) قوة الاختبار Power of the Test

منحنى قوة الاختبار Power of the Test Curve

منحنى مميز الفاعلية Operation Characteristic Curve (OC)

إن قوة الإختبار عبارة عن احتمال رفض الفرض العدمي $H_0$ عندما يكون الفرض البديل $H_1$ صحيحاً، أي أن

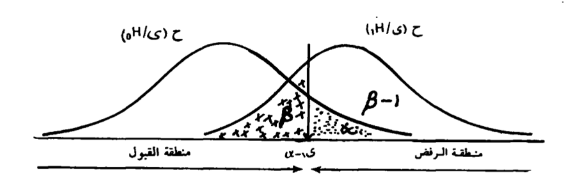
قوة الاختبار = ١ - $\beta$ (٥ ـ ١ ـ ٧)

وبالتالي فإن قوة الإختبار تعبّر عن قوة الفرض البديل $H_1$

فإذا اعتبرنا اختبار متوسط مجتمع معتاد، فإنه يمكن تبيان كيفية حساب قوة الإختبار ورسم كل من منحنى قوة الإختبار ومنحنى مميّز الفاعلية في الحالات التالية:

**أولاً: اختبار الطرف العلوي**

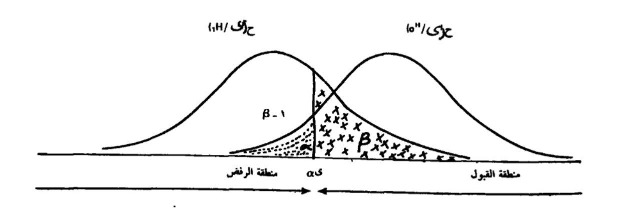
بالإشارة إلى الفرض المحدد في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٧) فإننا نحدد قيمة كل من الخطأ من النوع الثاني $\beta$ وقوة الإختبار ١ ـ $\beta$ كما هو مبينّ في الشكل (٤ ـ ١ ـ ٧):




شكل (٤ ـ ١ ـ ٧)

**ثانياً: اختبار الطرف السفلي**

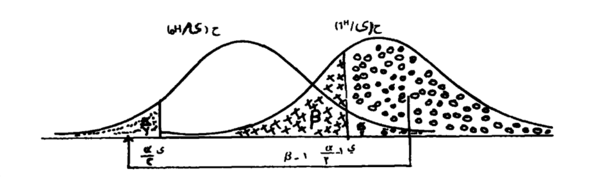
بالإشارة إلى الفرض المحدّد في المعادلة (٣ ـ ٢ ـ ٧) فإننا نحدّد قيمة كل من الخطأ من النوع الثاني $\beta$ وقوة الإختبار ١ ـ $\beta$ كما هو مبين في الشكل (٥ ـ ١ ـ ٧)




شكل (٥ ـ ١ ـ ٧)

**ثالثاً**: اختبار الطرفين

بالإشارة إلى الفرض المحدّد في المعادلة (١ ـ ٢ ـ ٧) فإننا نحدّد قيمة كل من الخطأ من النوع الثاني $\beta$ وقوة الإختبار ١ ـ $\beta$ كما هو مبينّ في الشكل (٦ ـ ١ ـ ٧)



شكل (٦ ـ ١ ـ ٧)

**مثـــال**:

مصنع معيّن يقوم بصناعة أنواع من الحبال قوة تحملها للشد تتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ يساوي ٢٠٠ كغم وانحراف معياري لقوة التحمل ($\sigma$) يساوي ٢٤ كغم، ويعتقد أحد المهندسين أن معالجة هذه الحبال بمادة كيميائية جديدة يزيد في قوة تحملها. فإذا أخذنا عينة من إنتاج هذا المصنع حجمها ٣٦ حبلاً بعد معالجتها بالطريقة الجديدة، اختبر صحة إدعاء هذا المهندس واحسب قوة الإختبار وارسم كلاً من منحنى قوة الإختبار ومنحنى مميز الفاعلية.

**الحـــل**:

إن الاختبار الذي نريد إجراءه هو اختبار الطرف العلوي، أي أن

$H_0$ : $\mu \leqslant$ ٢٠٠ كيلوغرام

$H_1$ : $\mu >$ ٢٠٠ كيلوغرام

والفرض العدمي يعني أن قوة التحمل بعد المعالجة أقل من أو تساوي قوة التحمل قبل المعالجة أما الفرض البديل فإنه يعني أن قوة التحمل بعد المعالجة أكبر من قوة التحمل قبل المعالجة.

وحيث أن الإنحراف المعياري للتوزيع المعتاد معلوم ويساوي ٢٤ كيلوغرام فإن

توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي س هو معتاد توقعه $\mu$ وتباينه يساوي

$\frac{(٢٤)^{٢}}{٣٦}$ = ١٦ وبالتالي فإن الدالة الإختبارية

$$ى = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}} = \frac{\bar{س} - ٢٠٠}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

$$= \frac{\bar{س} - ٢٠٠}{٤}$$

تتبع التوزيع المعتاد القياسي.

وإذا فرضنا أن مستوى المعنوية $\alpha$ = ٠,٠١ فان

$ى_{١-\alpha}$ = $ى_{١-٠,٠١}$ = $ى_{٠,٩٩}$ = ٢,٣٣ وذلك من جدول رقم (٣)

$$\therefore ٢,٣٣ = \frac{\bar{س} - ٢٠٠}{٤}$$

ومنها فإن

$\bar{س}$ = ٢,٣٣ × ٤ + ٢٠٠ = ٢٠٩,٣٢

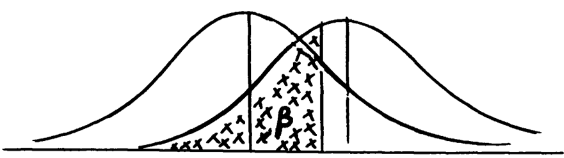
فإذا كانت قيمة $\bar{س}$ ≥ ٢٠٩,٣٢ فإننا نقبل الفرض العدمي

وإذا كانت قيمة $\bar{س}$ > ٢٠٩,٣٢ فإننا نرفض الفرض العدمي

وتحسب قيمة $\beta$ وبالتالي ١ - $\beta$ بفرض قيم مختلفة لقوة التحمل $\mu$ تحت الفرض البديل. فإذا كانت $H_1$ : $\mu$ = ٢١٠ فإننا نحسب $\beta$ ، ١ - $\beta$ على النحو التالي:

إن $\beta$ ، كما سبق أن أوردنا، عبارة عن احتمال قبول الفرض العدمي عندما يكون الفرض البديل صحيحاً. أي أن

$\beta$ = احتمال (قبول العملية الإنتاجية القديمة عندما تكون قوة التحمل ٢١٠ كغم) وتحسب قيمة هذا الإحتمال كما هو مبيّن في الشكل (٧ - ١ - ٧)



شكل (٧ - ١ - ٧)

أي أن

$$\beta = ح\left(ى < \frac{٢٠٩ - ٢١٠}{\frac{٢٤}{٦}}\right)$$

$$= ح\left(ى < -٠,٢٥\right)$$

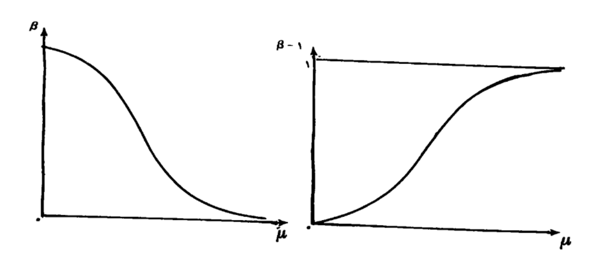
$$= ٠,٤٠١٣$$

وإذا كانت العملية الإنتاجية الجديدة تنتج حبالاً ذات قوة تحمل ١٨٠، ١٨٥، ١٩٠، ١٩٥، ٢٠٠، ٢٠٥، ٢١٠، ٢١٥، ٢٢٠ فإنه يمكن ايجاد قيم $\beta$ في هذه الحالات بنفس الطريقة السابقة والنتائج مبينة في الجدول التالي:

| $\mu$ | ى | $\beta$ | $1 - \beta$ |
|---|---|---|---|
| ١٨٠ | $\frac{٢٠٩ - ١٨٠}{\frac{٢٤}{٦}} = ٧,٢٥$ | ١,٠٠٠٠ | صفر |
| ١٨٥ | $\frac{٢٠٩ - ١٨٥}{\frac{٢٤}{٦}} = ٦,٠٠$ | ١,٠٠٠٠ | صفر |
| ١٩٠ | $\frac{٢٠٩ - ١٩٠}{\frac{٢٤}{٦}} = ٤,٧٥$ | ١,٠٠٠٠ | صفر |
| ١٩٥ | $\frac{٢٠٩ - ١٩٥}{\frac{٢٤}{٦}} = ٣,٢٥$ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٠٠٠٦ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٢٠٠ | $\frac{٢٠٠ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = ٢,٢٥$ | ٠,٩٨٧٨ | ٠,٠١٣٢ |
| ٢٠٥ | $\frac{٢٠٥ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = ١,٠٠$ | ٠,٨٤١٣ | ٠,١٥٨٧ |
| ٢١٠ | $\frac{٢١٠ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = - ٠,٢٥$ | ٠,٤٠١٣ | ٠,٥٩٨٧ |
| ٢١٥ | $\frac{٢١٥ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = - ١,٥٠$ | ٠,٠٦٦٨ | ٠,٩٣٣٢ |
| ٢٢٠ | $\frac{٢٢٠ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = - ٢,٧٥$ | ٠,٠٠٣٠ | ٠,٩٩٧٠ |
| ٢٢٥ | $\frac{٢٢٥ - ٢٠٩}{\frac{٢٤}{٦}} = - ٤,٠٠$ | صفـر | ١ |

والشكلان (٨ ـ ١ ـ ٧) ، (٩ ـ ١ ـ ٧) يوضحـان منحنى مميّز الفـاعلية ومنحنى قوة الاختبار




شكل (٩ ـ ١ ـ ٧) منحنى قوة الاختبار

شكل (٨ ـ ١ ـ ٧) منحنى مميز الفاعلية

(٦ـ ١ ـ ٧) اختبار الفرضيات الإحصائية باستخدام فترة الثقة.

إذا كان الاختبار ذا طرفين فإنه يمكن اجراؤه كما هو موضّح بالمثال التالي:

إذا أردنا مثلاً إجراء اختبار يتعلق بقيمة متوسط مجتمع معتاد $\mu$ سواء كان التباين معلوماً أو غير معلوم فإننا نتبع الخطوات التالية:

١ ـ صياغة الفرضين العدمي والبديل كما يلي:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad (٦ - ١ - ٧)$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

٢ تحديد مستوى المعنوية $\alpha$.

٣ ـ تحديد أفضل مقياس أحصائي غير متحيز للمعلمة وليكن $\overline{س}$.

٤ ـ تحديد توزيع المعاينة للمقياس الاحصائي المحدد في الخطوة ٣، فالوسط الحسابي $\overline{س}$ مثلاً يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\frac{\sigma^2}{ن}$ إذا كانت قيمة $\sigma^2$ معلومة، ويتبع توزيع ستيودنت (ت) إذا كانت قيمة $\sigma^2$ غير معلومة.

٥ ـ نكوّن فترة ثقة على النحو التالي:

$$\mu_0 - ى_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} < \overline{س} < \mu_0 + ى_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \qquad (٧ - ١ - ٧)$$

إذا كانت قيمة $\sigma^2$ معلومة

$$\mu_0 - ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{ع}{\sqrt{ن}} < \overline{س} < \mu_0 + ت_{١-\frac{\alpha}{٢}} \frac{ع}{\sqrt{ن}} \qquad (٧ - ١ - ٨)$$

إذا كانت قيمة $\sigma^2$ غير معلومة.

حيث ع الانحراف المعياري للعينة العشوائية المختارة في الخطوة التالية.

٦ ـ نختار عينة عشوائية حجمها ن مفردة من مجتمع الدراسة ونحسب منها قيمة المقدّر $\overline{س}$.

٧ ـ إذا كانت قيمة $\overline{س}$ تقع ضمن الفترة (٧ ـ ١ ـ ٧) إذا كان التباين معلوماً أو ضمن الفترة (٨ ـ ١ ـ ٧) إذا كان التباين غير معلوم فإننا نقبل الفرض.

أما إذا كان الاختبار ذا طرف واحد فإننا نجريه باتباع نفس الخطوات السابقة باستثناء فترة الثقة في الخطوة ٥ فإنها تصبح كما يلي:

**أولاً**: في حالة اختبار الطرف العلوي المبيّن في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٧) فإن

$$\mu_0 + ى_{١-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$$ إذا كانت قيمة $\sigma^2$ معلومة (٩ ـ ١ ـ ٧)

$\mu_0 +$ ت$_{1-\alpha}$ $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$ إذا كانت قيمة $\sigma^2$ غير معلومة (١٠ - ١ - ٧)

وتصبح قاعدة اتخاذ القرار في الخطوة ٧، كما يلي:

إذا كانت قيمة $\overline{س}$ أقل من القيمة التي نحصل عليها من (٩ - ١ - ٧) أو القيمة التي نحصل عليها من (١٠ - ١ - ٧)، حسب الحالة، فإننا نقبل الفرض.

ثانياً: في حالة اختبار الطرف السفلي المبيّن في المعادلة (٣ - ١ - ٧) فإن

$\mu_0 -$ ى$_{1-\alpha}$ $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}$ إذا كانت قيمة $\sigma^2$ معلومة (١١ - ١ - ٧)

$\mu_0 -$ ت$_{1-\alpha}$ $\frac{ع}{\sqrt{ن}}$ إذا كانت قيمة $\sigma^2$ غير معلومة. (١٢ - ١ - ٧)

وتصبح قاعدة اتخاذ القرار في الخطوة ٧ كما يلي:

إذا كانت قيمة $\overline{س}$ أكبر من القيمة التي نحصل عليها من (١١ - ١ - ٧) أو القيمة التي نحصل عليها من (١٢ - ١ - ٧)، حسب الحالة، فإننا نقبل الفرض.

## (٧ - ١ - ٧) اختبارات متوسط المجتمع Tests of a Population Mean

إذا فرضنا أن متوسط المجتمع هو $\mu$ وأن القيمة المفترضة لهذا المتوسط هي $\mu_0$ فإن الفرضين العدمي والبديل يمكن أن يكونا بالصورة (١ - ١ - ٧) أو بالصورة (٢ - ١ - ٧) أو بالصورة (٣ - ١ - ٧)، وأفضل مقياس إحصائي لتقدير المعلمة $\mu$ هو متوسط العينة $\overline{س}$. ولقد سبق أن عرفنا أنه إذا كان مجتمع الدراسة معتاداً بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$ وكانت $\sigma^2$ معلومة فإن توزيع المعاينة للمقياس الإحصائي $\overline{س}$ هو معتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\frac{\sigma^2}{\sqrt{ن}}$، أما إذا كان تباين المجتمع المعتاد $\sigma^2$ غير معلوم فإننا نقدّره بتباين العينة ع$^2$ = $\frac{1}{ن - 1}$ $\sum_{ر=1}^{ن}$ (س$_ر$ − $\overline{س}$)$^2$ ويكون توزيع المعاينة المستخدم في هذه الحالة هو ت بدرجات حرية (ن − ١).

أما إذا كان المجتمع الأصلي غير طبيعي، فقد سبق أن عرفنا من نظرية النزعة المركزية أنه يمكن تقريب توزيع المعاينة للمقياس الاحصائي $\overline{س}$ بالتوزيع الطبيعي كلما زاد حجم العينة (ن > ٣٠)

**مثال ١:**

في إحدى الدراسات اختيرت عينة عشوائية من الأسر التي تقطن في مدينة ما،

فإذا كان حجم العينة يساوي ٢٥٠ أسرة ومجموع الدخول الشهرية لهذه الأسر ١٢٢٥٠ دينار، وإذا علم أن توزيع الدخول في هذه المدينة يتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط $\mu$ (غير معلوم) وتباين $\sigma^2$ = ٢٥٠ (دينار)[٢]، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن متوسط الدخل $\mu$ يساوي ٥٠ دينار.

$H_0$ : $\mu$ = ٥٠

$H_1$ : $\mu \neq$ ٥٠

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع $\mu$ هو الوسط الحسابي للعينة $\bar{س}$ ويحسب من المعلومات المعطاة كما يلي:

$$\bar{س} = \frac{١٢٢٥٠}{٢٥٠} = ٤٩$$

وباستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧م) فإن المقدار:

$$\frac{\bar{س} - ت(\bar{س})}{\sigma_{\bar{س}}} = \frac{\bar{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$ يتبع التوزيع المعتاد القياسي.

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$ى = \frac{٤٩ - ٥٠}{\frac{\sqrt{٢٥٠}}{\sqrt{٢٥٠}}} = \frac{-١}{١} = -١$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي جدول رقم (٣) فإن:

$ى_{٠,٠٢٥} = -١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$

وبما أن قيمة ى تقع بين $ى_{٠,٠٢٥}$ ، $ى_{٠,٩٧٥}$ فإننا نقبل الفرض (أي أن متوسط الدخل لا يختلف معنوياً عن ٥٠ ديناراً).

**مثال ٢ :**

اختبر صحة الفروض في الحالات التالية:

**أولاً** ١ ـ الفرض: متوسط المجتمع = ١٠٠ دينار

٢ ـ حجم العينة = ٦٤ دينار

٣ ـ متوسط العينة = ٩٥ دينار

٤ ـ الانحراف المعياري للمجتمع = ٥ دنانير

٥ ـ مستوى المعنوية = ١٪

**ثانياً** ١ ـ الفرض: متوسط المجتمع = ٢٠ قرش

٢ ـ حجم العينة = ١٦ مفردة

٣ ـ متوسط العينة = ٢٢ قرش

٤ ـ الانحراف المعياري للعينة = ١ قرش

٥ ـ مستوى المعنوية = ٥٪

علماً بأن مجتمع الدراسة في الحالتين يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$.

**الحـــل:**

**أولاً:** $H_0$ : $\mu = ١٠٠$

$H_1$ $\mu \neq ١٠٠$

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع $\mu$ هو الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$.

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٠) فإن المقدار:

$$\frac{\overline{س} - ت\,(\overline{س})}{\sigma_{\overline{س}}} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$

يتبع التوزيع المعتاد القياسي. وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$ى = \frac{٩٥ - ١٠٠}{\frac{٥}{٦٤}} = \frac{- ٥}{\frac{٥}{٨}} = - ٨$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي جدول رقم (٣) فإن:

$ى_{٠,٠٠٥} = - ٢,٥٧٦$

$ى_{٠,٩٩٥} = + ٢,٥٧٦$

وبما أن قيمة ى لا تقع بين $ى_{٠,٠٠٥}$ ، $ى_{٠,٩٩٥}$ فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط المجتمع يختلف معنوياً عن ١٠٠ دينار).

**ثانياً:** $H_0$ : $\mu = ٢٠$

$H_1$ $\mu \neq ٢٠$

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع هو الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$

باستخدام المعادلة (٤ - ١ - ٧) فإن المقدار:

$$\frac{\overline{س} - ت(\overline{س})}{\sigma_{\overline{س}}} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$

يتبع توزيع ت بدرجات حرية ن - ١. وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$ت = \frac{٢٢ - ٢٠}{\frac{١}{\sqrt{١٦}}} = \frac{٢}{\frac{١}{٤}} = ٨$$

ومن جدول توزيع ت جدول رقم (٥) فإن:

$ت_{٠,٠٢٥ ، ١٥} = - ٢,١٣١$

$ت_{٠,٩٧٥ ، ١٥} = + ٢,٢٣١$

وبما أن قيمة ت لا تقع بين $ت_{٠,٠٢٥ ، ١٥}$ ، $ت_{٠,٩٧٥ ، ١٥}$ فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط المجتمع يختلف معنوياً عن ٢٠ قرشاً)

**مثـال ٣:**

أخذت عينة عشوائية بسيطة حجمها ٨١ مفردة من العاملين في مصنع كبير ووجد أن توزيع العمال حسب عدد القطع التي ينتجها العامل في اليوم الواحد هو على النحو التالي:

| فئات الانتاج اليومي بالقطعة | عدد العمـــال |
|---|---|
| ٤٠ - ٥٠ | ٩ |
| ٥٠ - ٦٠ | ٢٠ |
| ٦٠ - ٧٠ | ٣٠ |
| ٧٠ - ٨٠ | ١٥ |
| ٨٠ - ٩٠ | ٧ |
| المجموع | ٨١ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسط الانتاج اليومي للعامل الواحد

يساوي ٦٠ قطعة، وذلك بمستوى معنوية ٥٪. إذا علم أن توزيع عدد القطع التي ينتجها العامل يومياً (ليس بالضرورة طبيعياً) له توقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$ (كمية محدودة وتساوي ٣٦).

الحل:

$H_0$ : $\mu = ٦٠$

$H_1$ : $\mu \neq ٦٠$

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع $\mu$ هو الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ ويحسب كما يلي:

| مركز الفئة س | التكرار | الانحراف المختزل ح′ | ح′ × ك |
|---|---|---|---|
| ٤٥ | ٩ | ٢ - | ١٨ - |
| ٥٥ | ٢٠ | ١ - | ٢٠ - |
| ٦٥ | ٣٠ | صفر | صفر |
| ٧٥ | ١٥ | ١ + | ١٥ |
| ٨٥ | ٧ | ٢ + | ١٤ |
| المجموع | ٨١ | | ٩ - |

ملاحظة: الانحراف المختزل $ح' = \frac{س - أ}{ت}$

حيث س مركز الفئة؛

أ أي وسط فرضي (غالباً مركز الفئة التي يقابلها أكبر تكرار)

ث طول الفئة إذا كانت أطوال الفئات متساوية

$$\overline{س} = \frac{-٩}{٨١} \times ١٠ + ٦٥ = ٦٣,٩$$

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) ونظرية النزعة المركزية فإن المقدار:

$$\frac{\overline{س} - ت(\overline{س})}{\sigma_{\overline{س}}} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{ن}}}$$ يتبع التوزيع المعتاد القياسي

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$ى = \frac{٦٣,٩ - ٦٠}{\frac{٦}{٩}} = \frac{٣,٩ \times ٩}{٦} = ٥,٨٥$$

ومن جدول توزيع ى (جدول رقم (٣)) فإن:

$ى_{٠,٠٢٥} = - ١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = + ١,٩٦$

وبما أن قيمة ى لا تقع بين ى٠,٠٢٥ ، ى٠,٩٧٥ . فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط الانتاج اليومي للعامل يختلف عن ٦٠ قطعة بشكل معنوي).

**مثال ٤:**

تدعي شركة لانتاج الألبان بأن متوسط وزن علبة الحليب ذات السعة ٥٠٠ غم لا يقل عن ٥٠٠ غم. فإذا اخترنا عشوائياً عينة من إنتاج هذه الشركة حجمها ٢٥ علبة ووجدنا أن متوسط وزن العلبة لهذه العينة هو ٤٩٨ غم والانحراف المعياري لوزن العلبة هو ٩ غم، اختبر بمستوى معنوية ١٪ صحة ادعاء الشركة المنتجة.

**الحل:**

$H_0 \quad : \quad \mu \geqslant ٥٠٠$

$H_1 \quad : \quad \mu < ٥٠٠$

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع $\mu$ هو الوسط الحسابي للعينة س باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار:

$$\frac{\overline{س} - ت(\overline{س})}{\hat{\sigma}_{\overline{س}}} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$ يتبع توزع ت بدرجات حرية (ن - ١).

وبالتعويض في الدالة الاختبارية فإن:

$$ت = \frac{٤٩٨ - ٥٠٠}{\frac{٩}{\sqrt{٢٥}}} = \frac{-٢}{\frac{٩}{٥}} = \frac{-١٠}{٩} = -١,١$$

ومن جدول توزيع ت (جدول رقم (٥)) فإن:

$ت_{٠,٠١ ، ٢٤} = - ٢,٤٩٢$

وحيث أن قيمة ت أكبر من قيمة ت٠,٠١ ، ٢٤ فإننا نقبل الفرض القائل بأن متوسط وزن علبة الحليب لا يقل عن ٥٠٠ غم (أي أننا نؤيد ادعاء الشركة المنتجة).

**مثـــال ٥ :**

إذا كان من المفروض أن لا يزيد وزن قرص الدواء من إنتـاج شركة معينـة عن ٤٠ ملغم واخترنا عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة حجمها ٢٥ قرصاً ووجدنـا أن متـوسط الوزن لهـذه العينـة هـو ٤٠,١ ملغم والإنحـراف المعيـاري للوزن هـو ٠,٣ ملغم، فهل يمكن القول بأن وزن القرص المنتج يطابق المواصفات المطلوبة؟ (استخدم مستوى معنوية ١٪).

**الحـــل:**

$H_0$ : $\mu \leqslant$ ٤٠

$H_1$ : $\mu >$ ٤٠

والمقدّر المناسب لمتوسط المجتمع $\mu$ هو الوسط الحسابي للعينة $\overline{س}$ .

باستخدام المعادلة (٤ ـ ١ ـ ٧) فإن المقدار

$$\frac{\overline{س} - ت(\overline{س})}{\hat{\sigma}_{\overline{س}}} = \frac{\overline{س} - \mu}{\frac{ع}{\sqrt{ن}}}$$ يتبع توزيع ت بدرجات حرية (ن − ١).

وبالتعويض في الدالة الإختبارية فإن

$$ت = \frac{٤٠,١ - ٤٠}{\frac{٠,٣}{٥}} = \frac{٠,٥}{٠,٣} = ١,٦٧$$

ومن جدول توزيع ت (جدول رقم (٥)) فإن

$ت_{٠,٩٩،٢٤} = ٢,٤٩٢$

وحيث أن قيمـة ت أقـل من قيمـة $ت_{٠,٩٩،٢٤}$ فـإننـا نقبـل الفــرض (أي أن الأقراص المنتجة تطابق المواصفات المطلوبة).

**(٨ ـ ١ ـ ٧) اختبارات نسبة المجتمع Tests of Population Proportion**

إذا كانت نسبة المفردات التي تحمل صفـة ما في مجتمـع معيّن حجمـه ـلـه هي ح واخترنا جميع العينات الممكنة التي حجمها ن من هذا المجتمع وحسبنـا نسبة المفـردات التي تحمل هذه الصفة (ح) في كل عينة من هذه العينات فإن

$$ت(\hat{ح}) = ح \qquad (١٣ ـ ١ ـ ٧)$$

$$\text{تبا}(\hat{ح}) = \frac{ح(١ - ح)}{ن} \times \frac{\text{ﻫ} - ن}{\text{ﻫ} - ١} \qquad (١٤ - ١ - ٧)$$

حيث $\frac{\text{ﻫ} - ن}{\text{ﻫ} - ١}$ معامل تصحيح المجتمعات المحدودة ويؤول إلى واحد صحيح عندما يكون المجتمع غير محدود أو عندما لا يتجاوز حجم العينة ١٠٪ من حجم المجتمع.

وقد وجد أن نسب المفردات التي تحمل الصفة موضوع الدراسة في جميع العينات الممكنة تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بتوقع ح وتباين $\left(\frac{ح(١ - ح)}{ن}\right)$ في حالة المجتمعات غير المحدودة كما هو مبيّن في المعادلة (١٤ ـ ١ ـ ٧). ويستخدم توزيع المعاينة المعتاد في تكوين فترة الثقة لنسبة المجتمع كما أسلفنا في الباب السابق واختبار الفرضيات التي تتعلق بهذه النسبة كما هو موضّح في الأمثلة التالية.

**مثـــال ١:**

تاجر تفاح بالجملة يدعي أن ما يورّده من هذه الفاكهة لا يحتوي على أكثر من ٤٪ من الثمار التالفة. فإذا اختيرت عينة عشوائية بسيطة من ٦٠٠ تفاحة ووجد فيها ٣٦ ثمرة تالفة اختبر صحة ادعاء البائع بمستوى معنوية ١٪.

**الحـــل:**

$H_0$: ح $\leqslant$ ٠,٠٤

$H_1$: ح $>$ ٠,٠٤

$$\hat{ح} = \frac{٣٦}{١٠٠} = ٠,٠٦$$

$$ى = \frac{٠,٠٦ - ٠,٠٤}{\sqrt{\frac{٠,٠٤ \times ٠,٩٦}{٦٠٠}}} = ٢,٥$$

$ى_{٠,٩٩} = ٢,٣٢٦$

وحيث أن ى $>$ $ى_{٠,٩٩}$ فإننا نرفض الفرض (أي أن ادعاء البائع غير صحيح).

**مثـــال ٢:**

يدعي منتج أحد الأدوية أن علاجاً معيناً يزيل أثر الحساسية لمدة ثمان ساعات بنسبة ٩٠٪ على الأقل. فإذا اختيرت عينة عشوائية بسيطة من المصابين بهذا المرض

حجمها ٢٠٠ شخص، ووجد بعد إعطائهم العلاج المشار إليه أن ١٦٠ منهم حصلوا على النتيجة المنتظرة، فما هو تعليقك على ادعاء المنتج؟ استخدم مستوى معنوية ١٪.

الحـــل:

$H_0$ : ح $\geq$ ٠,٩٠

$H_1$ : ح $<$ ٠,٩٠

$$\hat{ح} = \frac{١٦٠}{٢٠٠} = ٠,٨٠$$

$$ى = \frac{٠,٨٠ - ٠,٩٠}{\sqrt{\frac{٠,٩٠ \times ٠,١٠}{٢٠٠}}} = - ٤٫٧١$$

$ى_{٠,٠١}$ = - ٢,٣٢٦

وحيث أن ى $<$ $ى_{٠,٠١}$. فـإننـا نــرفض الفـرض (أي أن ادعـــاء المنتـج غـــير صحيح).

مثـــال ٣:

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن نسبـة الأشخاص الـذين يوافقـون على رأي معينّ في منطقة مـا هي ٠,٦٤، إذا وجد أن عـدد الذين يـوافقون عـلى هذا الرأي في عينة عشوائية بسيطة حجمها ١٠٠ هو ٦٠.

الحـــل:

$H_0$ : ح = ٠,٦٤

$H_1$ : ح $\neq$ ٠,٦٤

$$\hat{ح} = \frac{٦٠}{١٠٠} = ٠,٦٠$$

$$ى = \frac{٠,٦٠ - ٠,٦٤}{\sqrt{\frac{٠,٦٤ \times ٠,٣٦}{١٠٠}}} = - ٠,٨٣$$

$ى_{٠,٠٢٥}$ = - ١,٩٦

$ى_{٠,٩٧٥}$ = ١,٩٦

وحيث أن ى تقع بين $ى_{٠,٠٢٥}$ ، $ى_{٠,٩٧٥}$. فإننا نقبل الفرض.

## (٩ ـ ١ ـ ٧) اختبارات الفروق Tests of Differences

### أولاً: اختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين

Tests of the Difference Between Two Population Means

إذا فرضنا أن لدينا مجتمعين الأول توقعه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ والثاني توقعه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ فإننا نختبر الفروض المتعلقة بالفرق بين متوسطي المجتمعين، أي $\mu_1 - \mu_2$ وهذه الفروض هي:

$H_0$ : $\mu_1 - \mu_2 =$ صفر

$H_1$ : $\mu_1 - \mu_2 \neq$ صفر (٧ ـ ١ ـ ١٥)

وهو من الصورة (١ ـ ١ ـ ٧).

أو

$H_0$ : $\mu_1 - \mu_2 \leqslant$ صفر

$H_1$ : $\mu_1 - \mu_2 >$ صفر (٧ ـ ١ ـ ١٦)

وهو من الصورة (٢ ـ ١ ـ ٧)

أو

$H_0$ : $\mu_1 - \mu_2 \geqslant$ صفر

$H_1$ : $\mu_1 - \mu_2 <$ صفر (٧−١−١٧)

وهو من الصورة (٣ ـ ١ ـ ٧).

١ ـ اختبارات العينات الكبيرة

إذا بدأنا بمجتمعين معتادين الأول توقعه $\mu_1$ وتباينه $\sigma_1^2$ والثاني توقعه $\mu_2$ وتباينه $\sigma_2^2$ واخترنا عينتين عشوائيتين مستقلتين من هذين المجتمعين الأولى حجمها $ن_1$ والثانية حجمها $ن_2$ وحسبنا الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{س}_1$ والوسط الحسابي للعينةالثانية $\overline{س}_2$، فإنه يمكن إثبات أن الفرق $\overline{س}_1 - \overline{س}_2$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu_1 - \mu_2$ وتباين $\frac{\sigma_1^2}{ن_1} + \frac{\sigma_2^2}{ن_2}$ . وفي العادة فإننا لا نعلم قيمتي $\sigma_1^2$، $\sigma_2^2$ وبالتالي فإننا نقدّرهما باستخدام $ع_1^2$، $ع_2^2$ على التوالي. وإذا كان حجم كل من العينتين أكبر من ٣٠ فإن الفرق $\overline{س}_1 - \overline{س}_2$ له توزيع معتاد بتوقع $\mu_1 - \mu_2$ وتباين $\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}$ . وتوزيع المعاينة لهذا الفرق يستخدم في تكوين فترات الثقة كما سبق أن أسلفنا واختبار الفرضيات الاحصائية كما هو موضح في الأمثلة التالية:

**مثـــال ١ :**

شركة تملك مصنعين لإنتاج المصابيح الكهربائية، اختيرت عينة عشوائية من إنتاج المصنع الأول حجمها $ن_١$ = ٣٠ مصباحاً ووجد أن متوسط عمر المصباح لهذه العينة $\bar{س}_١$ = ١٢٠٠ ساعة، واختيرت عينة عشوائية ثانية من إنتاج المصنع الثاني حجمها $ن_٢$ = ٤٢ مصباحاً ووجد أن متوسط عمر المصباح لهذه العينة $\bar{س}_٢$ = ١٢٥٠ ساعة. فإذا علم من خبرة سابقة أن تباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول هو ٢٥٠٠ (ساعة)$^٢$ ، وتباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثاني هو ٢٢٠٠ (ساعة)$^٢$ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن متوسط مدة خدمة المصابيح في المصنعين متساو.

**الحـــل :**

$H_0 : \mu_١ - \mu_٢ =$ صفر

$H_1 : \mu_١ - \mu_٢ \neq$ صفر

والمقدّر المناسب للفرق $\mu_١ - \mu_٢$ هو $\bar{س}_١ - \bar{س}_٢$

$$ى = \frac{(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢) - ت(\bar{س}_١ - \bar{س}_٢)}{\sigma_{\bar{س}_١ - \bar{س}_٢}}$$

$$= \frac{\bar{س}_١ - \bar{س}_٢}{\sqrt{\frac{\sigma_١^٢}{ن_١} + \frac{\sigma_٢^٢}{ن_٢}}}$$

$$= \frac{١٢٠٠ - ١٢٥٠}{\sqrt{\frac{٢٥٠٠}{٣٠} + \frac{٢٢٠٠}{٤٢}}}$$

$= - ٤,٢٩٢$

$ى_{٠,٠٢٥} = - ١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = + ١,٩٦$

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين قيمتي $ى_{٠,٠٢٥}$ ، $ى_{٠,٩٧٥}$ فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع الأول لا يساوي متوسط عمر المصابيح من إنتاج المصنع الثاني).

**مثـــال ٢ :**

يـريد مـدير المبيعـات في شركة للسيـارات أن يثبت لمدير عام هـذه الشركة أن متوسط الأرباح للسنة الحاليـة $\mu_1$ أكبر من متـوسط الأرباح للسنـة الماضيـة $\mu_2$. فإذا اختار عينة عشوائية حجمهـا ٣٥ من السيارات التي بيعت في السنـة الحاليـة ووجد أن متوسط الربح لهذه العينة هو $\bar{س}_1$ = ٣٥٠ ديناراً والإنحراف المعياري للأرباح في هذه العينة $ع_1$ = ٢٥ ديناراً، واختار عينة عشوائية حجمها ٣٥ من السيارات التي بيعت في السنة الماضية ووجد أن متوسط الربح لهذه العينـة هو $\bar{س}_2$ = ٣٤٠ دينـاراً والإنحراف المعيـاري للأربـاح $ع_2$ = ٣٠ ديناراً. اختـبر بمستوى معنـوية ٥٪ صحـة ادعاء مـديـر المبيعات.

**الحل**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant$ صفر

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 >$ صفر

$$ي = \frac{(\bar{س}_1 - \bar{س}_2) - ت(\bar{س}_1 - \bar{س}_2)}{\sigma_{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}}$$

$$= \frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{٣٥} + \frac{ع_2^2}{٣٥}}}$$

$$= \frac{٣٥٠ - ٣٤٠}{\sqrt{\frac{(٢٥)^2}{٣٥} + \frac{(٣٠)^2}{٣٥}}}$$

$$= ١,٥١$$

$$ي_{٠,٩٥} = ١,٦٤$$

وحيث أن ي < $ي_{٠,٩٥}$. فإننا نقبل الفرض (أي أن مدير المبيعات لم يتمكن من تقديم الدليل المقنع بأن متوسط الأرباح في السنة الحـالية أكـبر من متوسط الأربـاح في السنة الماضية).

**٢ ـ اختبارات العينات الصغيرة**

لقـد فرضنـا في الحالـة الأولى (إختبـارات العينـات الكبـيرة) إن حجم كـل من

العينتين العشوائيتين المستقلتين أكبر من ٣٠ وبالتالي فإن الاختبار يعتمد على التوزيع الطبيعي. أما إذا كان حجم كل من العينتين المستقلتين ٣٠ أو أقل فإننا نستخدم توزيع ستيودنت (ت). واستخدام توزيع ت في هذه الحالة يتطلب توافرالشرطين التاليين:

أ ـ أن تكون العينتان العشوائيتان مستقلتين

ب ـ أن يكون مجتمعا الدراسة معتادين وتبايناهما متساويين ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$).

وحيث أن التباين في العادة غير معلوم فإننا نقدره بالتباين التجميعي للعينتين معاً Combined or Pooled Variance ويعرّف كما يلي:

$$ع^2 = \frac{(ن_1 - 1)ع_1^2 + (ن_2 - 1)ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - 2} \qquad (18-1-7)$$

حيث

$$ع_1^2 = \frac{مجـ (س_{1ر} - \overline{س_1})^2}{ن_1 - 1}$$

$$ع_2^2 = \frac{مجـ (س_{2ر} - \overline{س_2})^2}{ن_2 - 1}$$

والدالة الاختبارية هي

$$ت = \frac{(\overline{س_1} - \overline{س_2}) - ت(\overline{س_1} - \overline{س_2})}{\hat{\sigma}_{\overline{س_1} - \overline{س_2}}}$$

$$= \frac{\overline{س_1} - \overline{س_2}}{\sqrt{ع^2 \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}}$$

$$= \frac{\overline{س_1} - \overline{س_2}}{\sqrt{\frac{(ن_1 - 1)ع_1^2 + (ن_2 - 1)ع_2^2}{ن_1 + ن_2 - 2}\left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right)}} \qquad (19-1-7)$$

**مثال**

اعطي امتحان في مبادىءالإحصاء لمجموعة من طلبة السنة الأولى في الجامعة

الأردنية مكونة من ١٦ طالباً من القسم العلمي و ٩ طلاب من القسم التجاري. وقد وجد أن الوسط الحسابي لعلامات طلبة القسم العلمي $\bar{\text{س}}_{\text{١}}$ = ٧٥ والإنحراف المعياري لعلاماتهم $\text{ع}_{\text{١}}$ = ٥، والوسط الحسابي لعلامات طلبة القسم التجاري $\bar{\text{س}}_{\text{٢}}$ = ٧٠ والإنحراف المعياري لعلاماتهم $\text{ع}_{\text{٢}}$ = ٨ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن الفرق بين متوسط علامات القسم العلمي ومتوسط علامات القسم التجاري غير معنوي.

**الحل**

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \text{صفر}$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \text{صفر}$

حيث $\mu_1$ متوسط علامات طلبة القسم العلمي

$\mu_2$ متوسط علامات طلبة القسم التجاري

وبالتعويض في (١٩ ـ ١ ـ ٧) فإن

$$\text{ت} = \frac{\text{٧٥} - \text{٧٠}}{\sqrt{\frac{\text{(١٦ - ١) ٢٥ + (٩ - ١) ٦٤}}{\text{١٦ + ٩ - ٢}}\left(\frac{\text{١}}{\text{١٦}} + \frac{\text{١}}{\text{٩}}\right)}}$$

$$= \frac{\text{٥}}{\sqrt{\frac{\text{٨٨٧}}{\text{٢٣}} \times \frac{\text{٢٥}}{\text{١٤٤}}}}$$

$$= \frac{\text{٥}}{\sqrt{\frac{\text{٢٢١٧٥}}{\text{٣٣١٢}}}}$$

$$= \frac{\text{٥}}{\sqrt{\text{٦,٦٩٥٣٥٠}}}$$

$$= \text{١,٩٣}$$

$\text{ت}_{\text{٠.٠٢٥}، \text{٢٣}} = -\text{٢,٠٦٩}$

$\text{ت}_{\text{٠.٩٧٥}، \text{٢٣}} = \text{٢,٠٦٩}$

وحيث أن قيمة ت تقع بين $ت_{23،0.025}$ و $ت_{23،0.975}$ فإننا نقبل الفرض (أي أنه لا يوجد فرق معنوي بين متوسط علامات طلبة القسم العلمي ومتوسط علامات طلبة القسم التجاري).

### ٣ ـ اختبارات الفروق بين متوسطي مجتمعين عندما تكون العينتان غير مستقلتين Paired Difference Tests of Two Population Means

لقد افترضنا في الحالتين الأولى والثانية أن العينتين مستقلتان. ولكن هناك بعض الحالات التي لا تكون فيها العينتان مستقلتين. فإذا قامت إدارة مصنع معيّن بتنظيم برنامج تدريبي لمجموعة من العمال وسجلت انتاجية العامل قبل وبعد التدريب فإن هاتين القيمتين غير مستقلتين. فإذا رمزنا للفرق بين الإنتاجية بعد التدريب والإنتاجية قبل التدريب بالرمز ف فإن الوسط الحسابي للفروق ($\overline{ف}$) يعرف كما يلي:

$$\overline{ف} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ف_ر}{ن} \qquad (٧ ـ ١ ـ ٢٠)$$

والإنحراف المعياري للفروق $ع_ف$ هو:

$$ع_ف = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ف_ر - \overline{ف})^2}{ن - ١}} \qquad (٧ ـ ١ ـ ٢١)$$

أما الدالة الإختبارية، بإفتراض أن الفروق تتبع التوزيع الطبيعي، فهي

$$ت = \frac{\overline{ف}}{ع_{\overline{ف}}} = \frac{\overline{ف}}{\frac{ع_ف}{\sqrt{ن}}} \qquad (٧ ـ ١ ـ ٢٢)$$

وتتبع توزيع ستيودنت (ت) بدرجات حرية (ن − ١).

**مثال**

لمعرفة أثر برنامج معيّن من التدريب على إنتاجية العمال في مصنع ما، أخذت عينة من عمال هذا المصنع حجمها ١٠ وسجلت انتاجيتهم قبل وبعد التدريب وكانت على النحو التالي:

| العامل | الانتاجية بالوحدة قبل التدريب | الانتاجية بالوحدة بعد التدريب |
|---|---|---|
| ١ | ٥٢ | ٥٨ |
| ٢ | ٥٨ | ٦٠ |
| ٣ | ٤٩ | ٥٦ |
| ٤ | ٥٠ | ٥٤ |
| ٥ | ٥٤ | ٥٦ |
| ٦ | ٥١ | ٥٧ |
| ٧ | ٥٥ | ٦٠ |
| ٨ | ٥٠ | ٥٥ |
| ٩ | ٦١ | ٦٤ |
| ١٠ | ٤٠ | ٥٠ |

اختبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن الانتاجية بعد التدريب أعلى منها قبل التدريب.

الحل

$H_0$ : $\sum_{ر=1}^{ن}$ فر $\leqslant$ صفر $\qquad$ $H_1$ : $\sum_{ر=1}^{ن}$ فر $>$ صفر

| ف | ف - $\overline{ف}$ | $(ف - \overline{ف})^2$ |
|---|---|---|
| ٦ | ١ | ١ |
| ٢ | -٣ | ٩ |
| ٧ | ٢ | ٤ |
| ٤ | -١ | ١ |
| ٢ | -٣ | ٩ |
| ٦ | ١ | ١ |
| ٥ | صفر | صفر |
| ٥ | صفر | صفر |
| ٣ | -٢ | ٤ |
| ١٠ | ٥ | ٢٥ |
| ٥٠ | | ٥٤ |

بالتعويض في (٢٠ ـ ١ ـ ٧)

$$\bar{ف} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$$

بالتعويض في (٢١ ـ ١ ـ ٧)

$$ع_{ف} = \sqrt{\frac{٥٤}{٩}}$$

$$= \sqrt{٦}$$

$$= ٢,٤٥$$

بالتعويض في (٢٢ ـ ١ ـ ٧)

$$ت = \frac{٥}{\frac{٢,٤٥}{\sqrt{١٠}}}$$

$$= \frac{٥}{\frac{٢,٤٥}{٣,١٦}}$$

$$= ٦,٤١$$

$$ت_{٩٩,٠,٩} = ٢,٨٢١$$

وبما أن قيمة ت أكبر من $ت_{٩٩,٠,٩}$ فإننا نرفض الفرض (أي أن الإنتاجية بعد التدريب أكبر منها قبل التدريب).

ثانياً: اختبارات الفروق بين نسبتي مجتمعين

Tests of the Difference Between Two Population Proportions

إذا فرضنا أن $ح_١$ هي نسبة النجاح في مجتمع ما، $ح_٢$ هي نسبة النجاح في مجتمع آخر. واخترنا عينة عشوائية كبيرة من المجتمع الأول حجمها $ن_١$ وعينة عشوائية كبيرة من المجتمع الثاني حجمها $ن_٢$، وكانت نسبة النجاح في العينة الأولى هي $\hat{ح}_١$ ونسبة النجاح في العينة الثانية $\hat{ح}_٢$ حيث

$$\hat{ح}_١ = \frac{ر_١}{ن_١} \text{ ، } ر_١ = ٠ \text{ ، } ١ \text{ ، } \ldots \text{ ، } ن_١ \quad \text{عدد مرات النجاح في العينة الاولى} \qquad (٢٣ - ١ - ٧)$$

$\hat{ح}_٢ = \frac{ر_٢}{ن_٢}$ ، $ر_٢$ = ٠ ، ١ ، . . . ، $ن_٢$ عدد مرات النجاح في العينة الثانية

(٢٤ - ١ - ٧)

فقد أثبت الاحصائيون، كما سبق أن أسلفنا، أن الفرق بين نسبتين العينتين $\hat{ح}_١$، $\hat{ح}_٢$ $(\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢)$ يتبع التوزيع الطبيعي

بتوقع: ت $(\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢) = ح_١ - ح_٢$ (٢٥ - ١ - ٧)

وتباين: تبا $(\hat{ح}_١ - \hat{ح}_٢) = \frac{ح_١ (١ - ح_١)}{ن_١} + \frac{ح_٢ (١ - ح_٢)}{ن_٢}$ (٢٦ - ١ - ٧)

والفروض التي نريد اختبارها والفروض البديلة يمكن أن تكون:

من الصورة (١ - ١ - ٧)، أي

$H_0$: $ح_١ - ح_٢$ = صفر

$H_1$: $ح_١ - ح_٢ \neq$ صفر (٢٧ - ١ - ٧)

أو من الصورة (٢ - ١ - ٧)، أي

$H_0$: $ح_١ - ح_٢ \geqslant$ صفر

$H_1$: $ح_١ - ح_٢ >$ صفر (٢٨ - ١ - ٧)

أو من الصورة (٣ - ١ - ٧)، أي

$H_0$: $ح_١ - ح_٢ \leqslant$ صفر

$H_1$: $ح_١ - ح_٢ >$ صفر (٢٩ - ١ - ٧)

ومن الجدير بالذكر أننا نفترض دائماً أن $ح_١ = ح_٢$ ما لم يثبت عكس ذلك، وبالتالي فإن كلاً من $ح_١$ ، $ح_٢$ تساوي قيمة واحدة ولتكن ح ، وحيث أن هذه القيمة غير معلومة فإننا نقدرها من بيانات العينتين العشوائيتين على النحو التالي:

$$\hat{ح} = \frac{\text{عدد مرات النجاح في العينة الأولى + عدد مرات النجاح في العينة الثانية}}{\text{حجم العينة الأولى + حجم العينة الثانية}}$$

$$= \frac{ر_١ + ر_٢}{ن_١ + ن_٢} \quad (٣٠ - ١ - ٧)$$

وبالتالي فإن تباين الفرق بين $\hat{ح}_١$ ، $\hat{ح}_٢$ ، والمعطى في المعادلة (٢٦ - ١ - ٧)، يؤول إلى

$$\text{تبا}(\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2) = \frac{\hat{ح}(1-\hat{ح})}{ن_1} + \frac{\hat{ح}(1-\hat{ح})}{ن_2}$$

$$= \hat{ح}(1-\hat{ح})\left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2}\right) \qquad (٣١ - ١ - ٧)$$

**مثـال:**

لدراسة مستويات الأمية بين الإناث اللواتي أعمارهن ١٨ سنة فأكثر، في مدينتي عمان وأربد، اخترنا عينتين عشوائيتين بسيطتين الأولى من عمان حجمها ١٢٠٠ ووجد أن عدد الأميات فيها ٤٨٠ والثانية من أربد حجمها ٩٠٠ وعدد الأميات فيها ٣٩٠، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ أن نسبة الأمية في عمان لا تختلف عن نظيرتها في مدينة أربد.

الحـل:

بالتعويض في (٢٣ ـ ١ ـ ٧)، (٢٤ ـ ١ ـ ٧) نجد أن

$$\hat{ح}_1 = \frac{٤٨٠}{١٢٠٠} = ٠,٤٠٠$$

$$\hat{ح}_2 = \frac{٣٩٠}{٩٠٠} = ٠,٤٣٣$$

وبالتعويض فى (٣٠ ـ ١ ـ ٧) فإن

$$\hat{ح} = \frac{٤٨٠ + ٣٩٠}{١٢٠٠ + ٩٠٠}$$

$$= ٠,٤١٤$$

بالتعويض في (٢٦ ـ ١ ـ ٧) نجد أن الإنحراف المعياري للفرق بين نسبتي العينتين هو

$$\hat{\sigma}_{\hat{ح}_1 - \hat{ح}_2} = \sqrt{٠,٤١٤ \times ٠,٥٨٦ \left(\frac{1}{١٢٠٠} + \frac{1}{٩٠٠}\right)}$$

$$= ٠,٠٢١٧٢$$

والفرضين العدمي والبديل هما كما في (٢٧ ـ ١ ـ ٧).

$$ى = \frac{٠,٤٠٠ - ٠,٤٣٣}{٠,٢١٧٢}$$

$$= - ١,٥١٩$$

$$ى_{٠,٠٢٥} = - ١,٩٦$$

$$ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$$

وحيث أن ى تقع بين ى٠,٠٢٥ ، ى٠,٩٧٥ فإننا نقبل الفرض (أي أن نسبة الأمية بين النساء ١٨ سنة فأكثر في مدينة عمان لا تختلف عن نظيرتها في مدينة أربد).

(١٠ ـ ١ ـ ٧) اختبار تباين مجتمع معتاد

من المعلوم أن المقدار

$$\frac{(ن - ١)\, ع^{٢}}{\sigma^{٢}} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^{٢}}{\sigma^{٢}}$$ يتبع توزيع كأي تربيع بدرجات حرية

(ن - ١) حيث س‌ر (ر = ١ ، ٢ ، . . . ، ن) يتبع توزيع معتاد توقعه $\mu$ وتباينه $\sigma^{٢}$

واختبارات تباين المجتمع المعتاد هي:

$$\begin{cases} H_0: \sigma^{٢} = \sigma_{٠}^{٢} \\ H_1: \sigma^{٢} \neq \sigma_{٠}^{٢} \end{cases} \qquad (٧ - ١ - ٣٢)$$

وهو من الصورة (١ ـ ١ ـ ٧)

$$\begin{cases} H_0: \sigma^{٢} \leqslant \sigma_{٠}^{٢} \\ H_1: \sigma^{٢} > \sigma_{٠}^{٢} \end{cases} \qquad (٧ - ١ - ٣٣)$$

وهو من الصورة (٢ ـ ١ ـ ٧)

$$\begin{cases} H_0: \sigma^{٢} \geqslant \sigma_{٠}^{٢} \\ H_1: \sigma^{٢} < \sigma_{٠}^{٢} \end{cases} \qquad (٧ - ١ - ٣٤)$$

وهو من الصورة (٣ ـ ١ ـ ٧)

نقبل الفرض في (٣٢ ـ ١ ـ ٧) إذا كان

$$\chi^{٢}\left(\frac{\alpha}{٢} \text{ ، } ن - ١\right) \leqslant \frac{(ن - ١)\, ع^{٢}}{\sigma_{٠}^{٢}} \leqslant \chi^{٢}\left(١ - \frac{\alpha}{٢} \text{ ، } ن - ١\right)$$

ونقبل الفرض في (٣٣ ـ ١ ـ ٧) إذا كان

$$\frac{(ن - ١) ع^{٢}}{\sigma_{٠}^{٢}} \leqslant \chi^{٢} (\alpha ، ن - ١)$$

وأخيراً نقبل الفرض في (٣٤ ـ ١ ـ ٧) إذا كان

$$\frac{(ن - ١) ع^{٢}}{\sigma^{٢}} \geqslant \chi^{٢} (١ - \alpha ، ن - ١)$$

حيث $ع^{٢} = \frac{١}{ن - ١} \sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢}$

$\chi^{٢}_{(\alpha ، ن-١)}$ هي قيمة $\chi^{٢}$ التي أقل منها مساحة $\alpha$ عندما درجات الحرية تساوي (ن - ١)

**مثـــال:**

اختيرت عينة عشوائية بسيطة حجمها ٢٥ أسرة من بين الأسر التي تقطن في مدينة معينة وقد تبيّن أن التوزيع التكراري للدخل الأسبوعي على النحو التالي:

| فئات الدخل الاسبوعي بالدينار | عدد الأسر |
|---|---|
| ٥٠ - ٦٠ | ٣ |
| ٦٠ - ٧٠ | ٥ |
| ٧٠ - ٨٠ | ١٢ |
| ٨٠ - ٩٠ | ٤ |
| ٩٠ - ١٠٠ | ١ |
| المجمـوع | ٢٥ |

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن تباين الدخل الأسبوعي لجميع الأسر في هذه المدينة هو ٩٥ (دينار)$^{٢}$ إذا علم أن الدخول الأسبوعية تتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^{٢}$

**الحـــل:**

$H_0 : \sigma^{٢} = ٩٥$

$H_1 : \sigma^{٢} \neq ٩٥$

وجد أن $\sum_{ر=١}^{٥} ك_ر (س_ر - \overline{س})^{٢} = ٢٤٠٠$

درجات الحرية ن - ١ = ٢٥ - ١ = ٢٤

$$\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر (س_ر - \bar{س})^2}{\sigma_0^2} = \frac{٢٤٠٠}{٩٥} = ٢٥,٢٦$$

$\chi^2_{٠,٠٢٥, ٢٤} = ١٢,٤٠$

$\chi^2_{٠,٩٧٥, ٢٤} = ٣٩,٣٦$

وحيث أن ٢٥,٢٦ تقع بين ١٢,٤٠ و٣٩,٣٦ فإننا نقبل الفرض (أي أن تباين الدخول الأسبوعية يساوي ٩٥ (دينار)$^2$

**(١١ - ١ - ٧) اختبار الانحراف المعياري**

إذا كان المتغير س يتبع توزيعاً معتاداً، واخترنا عينة عشوائية من المشاهدات المستقلة $س_1$، . . . ، $س_ن$ ، فإن $ع = \sqrt{\frac{1}{ن} \sum (س_ر - \bar{س})^2}$ يتبع تقريباً التوزيع المعتاد بتوقع σ وانحراف معياري $\frac{\sigma}{\sqrt{٢ن}}$ (راجع الفقرة (٥ - ٢ - ٦))

اختبار الإنحراف المعياري هو

$H_0 : \sigma = \sigma_0$

$H_1 : \sigma \neq \sigma_0$ (٧ - ١ - ٣٥)

والدالة الإختبارية التي تستخدم في إجراء الاختبار هي

$$ى = \frac{ع - \sigma}{\frac{\sigma}{\sqrt{٢ن}}} \qquad (٧ - ١ - ٣٦)$$

فإذا أردنا مثلاً أن نختبر الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجد من جدول التوزيع المعتاد القياسي القيم $ى_{٠,٠٢٥}$ ، $ى_{٠,٩٧٥}$ ، فإذا وقعت قيمة ى بين $ى_{٠,٠٢٥}$ ، $ى_{٠,٩٧٥}$. فإننا نقبل الفرض.

**مثال:**

بالرجوع إلى بيانات المثال المعطى في فترات الثقة (فقرة (٥ - ٢ - ٦))، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن الانحراف المعياري لدخل الأسرة في المنطقة المذكورة هو ١٠٥ ديناراً

الحـــل:

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل، بالرجوع إلى (٣٥ ـ ١ ـ ٧)، كما يلي:

$H_0$ : $\sigma$ = ١٠٥

$H_1$ : $\sigma$ ≠ ١٠٥

وجد أن ع = ١٠٣٫٣٤٩ دينار بالتعويض في (٣٦ ـ ١ ـ ٧) فإن:

$$ى = \frac{\frac{١٠٣٫٣٤٩ - ١٠٥}{١٠٥}}{\sqrt{٢ \times ١٢١}}$$

$$= \frac{\frac{-١٫٦٥١}{١٠٥}}{١١ \times ١,٤}$$

$$= \frac{-١٫٦٥١}{٦٫٨١٨}$$

$= -٠٫٢٤٢$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (١)) نجد أن:

$ى_{٠,٠٢٥} = -١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$

وحيث أن قيمة ى (−٠٫٢٤٢)لا تقع بين − ١,٩٦، ١,٩٦ فإننا نقبل الفرض (أي أن الانحراف المعياري لدخل الأسرة في المنطقة المذكورة يساوي ١٠٥ ديناراً).

(١٢ ـ ١ ـ ٧) اختبار معامل الارتباط $\rho$

سبق أن عرفنا من التقدير بفترة ثقة (فقرة (٦ ـ ٢ ـ ٥)) أن المقدار

١,١٥١٣ لو $\left(\frac{١ + ر}{١ - ر}\right)$ يتبع التوزيع المعتاد بتوقع: $\mu$ = ١,١٥١٣ لو $\left(\frac{١ + \rho}{١ - \rho}\right)$

وانحراف معياري $\frac{١}{\sqrt{ن - ٣}}$

واختبار معامل الارتباط $\rho$ هو:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \rho = \rho_0 \neq \text{صفر} \\ H_1 : \rho \neq \rho_0 \end{array} \right. \quad (٣٧ - ١ - ٧)$$

والدالة الاختبار التي تستخدم في إجراء الاختبار هي :

$$ى = \frac{١,١٥١٣ \text{ لو}\left(\frac{١ + ر}{١ - ر}\right) - ١,١٥١٣ \text{ لو}\left(\frac{١ + \rho}{١ + \rho}\right)}{\frac{١}{\sqrt{ن - ٣}}} \qquad (٧ - ١ - ٣٨)$$

فإذا أردنا أن نختبر الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجد من جدول التوزيع المعتاد القياسي القيم $ى_{٠.٠٢٥}$ ، $ى_{٠.٩٧٥}$ ، فإذا وقعت قيمة ى بين $ى_{٠.٠٢٥}$ ، $ى_{٠.٩٧٥}$ فإننا نقبل الفرض.

أما إذا كان الفرضان العدمي والبديل على النحو التالي:

$$H_0 : \rho = \text{صفر}$$

$$H_1 : \rho \neq \text{صفر} \qquad (٧ - ١ - ٣٩)$$

فإننا نستخدم الدالة الاختبارية:

$$ت = \frac{ر \sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^٢}} \qquad (٧ - ١ - ٤٠)$$

والتي تتبع توزيع ستيودنت بدرجات حرية ن − ٢ .

**مثـال ١ :**

بالرجوع إلى المثال المعطى في فترات الثقـة (فقرة (٦ ـ ٢ ـ ٦))، اختـبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن معامل الارتباط بين رأس المال والربح يساوي ٩٥٪ .

**الحـل:**

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل، بالاعتماد على (٣٧ ـ ١ ـ ٧) كما يلي:

$$H_0 : \rho = ٠,٩٥$$

$$H_1 : \rho \neq ٠,٩٥$$

وبالتعويض في (٣٨ ـ ١ ـ ٧) فإن:

$$ى = \frac{١,١٥١٣ \text{ لو}\left(\frac{١ + ٠,٩٠}{١ - ٠,٩٠}\right) - ١,١٥١٣ \text{ لو}\left(\frac{١ + ٠,٩٥}{١ - ٠,٩٥}\right)}{\frac{١}{\sqrt{٤٠ - ٣}}}$$

$$= \frac{1,1513 \text{ لو } 19 - 1,1513 \text{ لو } 39}{0,1644}$$

$$= \frac{1,1513 \times 1,0911 - 1,1513 \times 1,2788}{0,1644}$$

$$= \frac{1,8318 - 1,4723}{0,1644}$$

$$= -2,187$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي (جدول رقم (1)) نجد أن:

$$ى_{0,005} = -2,576$$

$$ى_{0,995} = +2,576$$

وحيث أن ى تقع بين $ى_{0,005}$ ، $ى_{0,995}$ فإننا نقبل الفرض (أي أن معامل الارتباط بين رأس المال والربح يمكن أن يساوي 0,95).

**مثال 2:**

**إذا كان معامل الارتباط بين علامات 15 طالباً في امتحانين مختلفين ر = 0,35 ، اختبر بمستوى معنوية 5٪ الفرض القائل بأن معامل الارتباط بين علامات الطلاب في الامتحانين $\rho$ = صفر.**

**الحل:**

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل بالرجوع إلى (39 ـ 1 ـ 7) كما يلي:

$H_0$ : $\rho$ = صفر

$H_1$ : $\rho \neq$ صفر

بالتعويض في (40 ـ 1 ـ 7) فإن:

$$ت = \frac{0,35\sqrt{15 - 2}}{\sqrt{1 - (0,35)^2}}$$

$$= \frac{1,262}{0,937}$$

$$= 1,347$$

ومن جدول توزيع ستيودنت (ت)(جدول رقم (٥)) فإن:

$ت_{٠,٩٥ ، ١٣} = ١,٧٧١$

وحيث أن ت < $ت_{٠,٩٥ ، ١٣}$ فإننا نقبل الفرض (أي أن معامل الارتباط بين علامات الطلاب في الامتحانين الأول وعلاماتهم في الامتحان الثاني يمكن أن يساوي صفراً).

**(١٣ ـ ١ ـ ٧) اختبارات معالم النموذج الخطي البسيط:**

إذا اعتبرنا النموذج المعطى بالمعادلة (٢٤ ـ ٢ ـ٦) فإن المطلوب هو اختبار الفرضيات التي تتعلق بثوابت هذا النموذج أ، ب.

**أولاً:** اختبار الثابت أو المعلمة أ

من المعلوم أن المقدار

$$ت = \frac{\hat{أ} - أ}{\hat{\sigma}_{\hat{أ}}} \qquad (٤١ ـ ١ ـ ٧)$$

يتبع توزيع ستيودنت (ت) بدرجات حرية ن − ٢.

وفي المعتاد فإننا نختبر الفرض القائل بأن معامل انحدار ص على س، أ، يساوي صفراً، وهذا يعني اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد علاقة بين س وص، أي:

$$H_0 : أ = صفر$$

$$H_1 : أ \neq صفر \qquad (٤٢ ـ ١ ـ ٧)$$

فإذا عوضنا من (٣٥ ـ ٢ ـ ٦)، (٤٣ ـ ٢ ـ ٦)، (٤٢ ـ ١ ـ ٧) في الدالة الاختبارية (٤١ ـ ١ ـ ٧) وقارنا القيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية من جدول توزيع ستيودنت (جدول رقم (٥)) عند مستوى معنوية $\alpha$ ودرجات حرية ن − ٢ فإننا نتوصل إلى قرار بقبول الفرض أو رفضه.

**ثانياً:** اختبار الثابت أو المعلمة ب

من المعلوم أن المقدار

$$ت = \frac{\hat{ب} - ب}{\hat{\sigma}_{\hat{ب}}} \qquad (٤٣ ـ ١ ـ ٧)$$

يتبع أيضاً توزيع ستيودنت بدرجات حرية ن − ٢.

ونريد اختبار الفرض القائل بأن الحد المطلق، ب يساوي قيمة محددة $ب_٠$، أي:

$H_0$ : ب = $ب_٠$

$H_1$ : ب ≠ $ب_٠$ (٤٤ - ١ - ٧)

فإذا عوضنا من (٣٧ - ٢ - ٦)، (٤٣ - ٢ - ٦)، (٤٢ - ١ - ٧) في (٤٣ - ١ - ٧) وقارنا القيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية من جدول توزيع ستيودنت (جدول رقم (٥)) عند مستوى معنوية $\alpha$ ودرجات حرية ن - ٢ فإننا نتوصل إلى قرار بقبول الفرض أو رفضه.

مثال:

الجدول التالي يبيّن الطول والعمر لعينة عشوائية من أشجار الصنوبر:

| العمر بالسنوات (س) | الطول بالأقدام (ص) |
|---|---|
| ٣ | ٩ |
| ١ | ٥ |
| ٢ | ٧ |
| ٥ | ١٤ |
| ٤ | ١٠ |

والمطلوب توفيق النموذج الخطي البسيط لهذه البيانات واختبار الفرض القائل بأن أ = صفر.

الحل:

| العمر (س) | الطول (ص) | س ص | $س^٢$ |
|---|---|---|---|
| ٣ | ٩ | ٢٧ | ٩ |
| ١ | ٥ | ٥ | ١ |
| ٢ | ٧ | ١٤ | ٤ |
| ٥ | ١٤ | ٧٠ | ٢٥ |
| ٤ | ١٠ | ٤٠ | ١٦ |
| ١٥ | ٤٥ | ١٥٦ | ٥٥ |

وبالتعويض في المعادلتين (٢٩ ـ ٢ ـ ٦)، (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) فإن:

$$\hat{أ} = \frac{١٥٦ - \frac{١٥ \times ٤٥}{٥}}{٥٥ - \frac{(١٥)^{٢}}{٥}} = ٢,١$$

$$\hat{ب} = \frac{٤٥}{٥} - ٢,١ \times \frac{١٥}{٥}$$

$$= ٩ - ٦,٣ = ٢,٧$$

$$\therefore \hat{ص} = ٢,١ \text{ س} + ٢,٧$$

| $\hat{ص}$ | $ص - \hat{ص}$ | $(ص - \hat{ص})^{٢}$ | $(س - \bar{س})^{٢}$ |
|---|---|---|---|
| ٩ | صفر | صفر | صفر |
| ٤,٨ | ٠,٢ | ٠,٠٤ | ٤ |
| ٦,٩ | ٠,١ | ٠,٠١ | ١ |
| ١٣,٢ | ٠,٨ | ٠,٦٤ | ٤ |
| ١١,١ | ١,١ - | ١,٢١ | ١ |
| | | ١,٩٠ | ١٠ |

وبالتعويض في (٤٣ ـ ٢ ـ ٦)، (٣٥ ـ ٢ ـ ٦)

$$MSE = \frac{١,٩}{٥ - ٢} = \frac{١,٩}{٣} = ٠,٦٣$$

$$\hat{\sigma}_{أ} = \sqrt{\frac{٠,٦٣}{١٠}} = \sqrt{٠,٠٦٣} = ٠,٢٥$$

وإذا عوضنا في (٤١ ـ ١ ـ ٧) نجد أن:

$$ت = \frac{٢,١ - صفر}{٠,٢٥} = ٨,٤$$

وإذا اخترنا $\alpha = ٠,٠٥$ ومن جدول توزيع ستيودنت(جدول رقم(٥)) نجد أن:

$$ت_{٣، ٠,٠٢٥} = - ٣,١٨١$$

$$ت_{٣، ٠,٩٧٥} = ٣,١٨١$$

وحيث أن قيمة ت المحسوبة لا تقع بين - ٣,١٨١ و ٣,١٨١ فإننا نرفض الفرض (أي أن معامل انحدار ص على س لا يساوي صفراً وبالتالي فإنه يوجد علاقة خطية بين هذين المتغيرين).

**(١٤ - ١ - ٧) اختبارات معالم النموذج الخطي العام:**

إذا اعتبرنا النموذج المعطى بالمعادلة (٢٥ - ٢ - ٦)، فإن المطلوب هو اختبار الفرضيات المتعلقة بمعالم هذا النموذج أ$_ر$ (ر = ١، ٢، ...، و).

من المعلوم أن المقدار.

$$ت = \frac{\hat{أ}_ر - أ_ر}{\hat{\sigma}_{\hat{أ}_ر}} \qquad (٤٥ - ١ - ٧)$$

يتبع توزيع ستيودنت (ت) بدرجات حرية ن - و.

ونريد اختبار الفرض القائل بأن الثابت أ$_ر$ يساوي صفراً، أي:

$H_0$ : أ$_ر$ = صفر

$H_1$ : أ$_ر$ $\neq$ صفر (٤٦ - ١ - ٧)

فإذا عوضنا من (٥٧ - ٢ - ٦)، (٦١ - ٢ - ٦)، (٤٦ - ١ - ٧) في (٤٥ - ١ - ٧) وقارنا القيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية من جدول توزيع ستيودنت (جدول رقم (٥)) عند مستوى معنوية $\alpha$ ودرجات حرية ن - و فإننا نتوصل إلى قرار بقبول الفرض أو رفضه.

**مثـال:**

إذا أعطيت لك بيانات على النموذج الخطي العام:

ص$_ر$ = أ. + أ$_١$ س$_{١ر}$ + أ$_٢$ س$_{٢ر}$ + خ$_ر$

وحصلت منها على النتائج التالية (التمرين التوضيحي ٢ في الفصل الأول من الباب السادس):

ن = ١٦

$\sum_{ر=١}^{١٦}$ ص$_ر$ = ٨٠

$\sum_{ر=١}^{١٦}$ ص$_ر^٢$ = ٦٥٤٠

$$(س' س) = \begin{bmatrix} ١٦ & ٨ & ٤ \\ ٨ & ٦ & ٢ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{bmatrix} ، \quad س' \underline{ص} = \begin{bmatrix} ٨٠ \\ ١٢٠ \\ ٤٠ \end{bmatrix}$$

$$(س' س)^{-١} = \begin{bmatrix} ٠,٢٠ & -٠,٢٥ & -٠,٠٥ \\ -٠,٢٥ & ٠,٥٠ & صفر \\ -٠,٠٥ & صفر & ٠,٢٠ \end{bmatrix}$$

اختبر بمستوى معنوية ٠,٠٥ الفرض القائل بأن $أ_١$ تساوي صفراً.

**الحـــل:**

$H_0$ : $أ_١$ = صفر

$H_1$ : $أ_١ \neq$ صفر

بالتعويض في (٥٤ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

$\hat{أ}_. = -١٦$ ، $\hat{أ}_١ = ٤٠$ ، $\hat{أ}_٢ = ٤$

وبالتعويض في (٥٧ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن

$$\hat{\sigma}_{\hat{أ}_.} = \sqrt{٢٢٠ \times ٠,٢٠} = ٦,٦٣٣$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{أ}_١} = \sqrt{٢٢٠ \times ٠,٥٠} = ١٠,٤٨٨$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{أ}_٢} = \sqrt{٢٢٠ \times ٠,٢٠} = ٦,٦٣٣$$

وبالتعويض في (٤٥ ـ ١ ـ ٧) نجد أن:

$$ت = \frac{٤٠ - صفر}{١٠,٤٨٨} = ٣,٨١٤$$

درجات الحرية (ν) = ١٦ − ٣ = ١٣

ومن جدول توزيع ستيودنت (ت) (جدول رقم (٥)) فإن:

$ت_{١٣، ٠,٠٢٥} = -٢,١٣١$

$ت_{١٣، ٠,٠٢٥} = ٢,١٣١$

وحيث أن قيمة ت لا تقع بين − ٢,١٣١ ، ٢,١٣١ فإننا نرفض الفـرض (أي أنه لا يمكن أن نسقط $س_١$ من النموذج).

## (١٥ - ١ - ٧) اختبارات جودة المطابقة والاستقلال:

**Tests of Goodness of Fit and Independence:**

تعتمد هذه الاختبارات على توزيع كاي تربيع ($\chi^2$). ونستخدم في إجراء الدالة التالية:

$$\chi^2 \text{ (للعينة)} = \text{مجـ} \frac{(\text{ك} - \text{ك}')^2}{\text{ك}'} \qquad (٧ - ١ - ٤٧)$$

حيث ك التكرار المشاهد Observed Frequency

ك′ التكرار المتوقع Expected Frequency

في اختبارات جودة المطابقة أو التمهيد فإنه يكون لدى الباحث أو الدارس فكرة أولية أو يخمّن أن مجتمع الدراسة له توزيع معيَّن، واختبار جودة المطابقة هو اختبار فرض ويمكن أن يكون مثلاً على الشكل التالي:

$H_0$ : مجتمع الدراسة يتبع التوزيع المعتاد بتوقع $\mu$ = ١٠٠، وتباين $\sigma^2$ = ٦٤

$H_1$ : مجتمع الدراسة لا يتبع التوزيع المعتاد.

أما اختبار الاستقلال فإنه يستخدم في جداول التوافق Contingency Tables لتقرير ما إذا كان المتغيران س، ص مستقلين أم لا. وهو أيضاً كجودة المطابقة اختبار فرض يمكن صياغته على النحو التالي:

$H_0$ : المتغيران س، ص مستقلان

$H_1$ : المتغيران س، ص غير مستقلين

ويختلف اختبار جودة المطابقة عن اختبار الاستقلال في طريقة حساب التكرارات المتوقعة وتحديد درجات الحرية.

**أولاً اختبار جودة المطابقة**

إن حساب التكرارات المتوقعة في هذا الاختبار يعتمد على الفرضيات عن مجتمع الدراسة. فلكي نختبر مثلاً أن متغيراً له توزيع منتظم فإننا نختار عينة عشوائيه حجمها ن ونسجل التكرار المشاهد لكل قيمة من قيم هذا المتغير ونحسب أيضاً التكرارات المتوقعة (متساوية) فيما لو كان المتغير يتبع التوزيع المنتظم، وبالتعويض في الدالة (٤٧ - ١ - ٧) يمكن إجراء الاختبار بمقارنة $\chi^2$ (للعينة) بقيمة $\chi^2$ (الجدولية) من جدول رقم (٤) وذلك عند مستوى معنوية $\alpha$ ودرجات حرية ٧. فإذا كانت $\chi^2$

(العينة) $< \chi^2$ (الجدولية) نقبل الفرض (أي أن توزيع المجتمع منتظماً). وبالمثل فإنه يمكن اختبار الفرض القائل بأن متغيراً ما يتبع التوزيع الطبيعي أو توزيع ذي الحدين أو توزيع بواسون بالاعتماد على خواص كل توزيع من هذه التوزيعات.

أما درجات الحرية، في اختبار جودة المطابقة، فإنها تحسب باستخدام المعادلة التالية:

درجات الحرية (ν) = ن - ١ - و (٤٨ - ١ - ٧)

حيث ن مجموع التكرارات المشاهدة

و عدد معالم أو ثوابت المجتمع التي تمّ تقديرها من العينة.

**مثال ١**

الجدول التالي يبيّن عدد الكتب المستعارة من مكتبة الجامعة خلال اسبوع معيّن:

| اليوم | : | السبت | الأحد | الإثنين | الثلاثاء | الأربعاء |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الكتب المستعارة | : | ١٣٥ | ١١٠ | ١٢٠ | ١١٥ | ١٤٠ |

والمطلوب: اختبار الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين اليوم وعدد الكتب المستعارة بمستوى معنوية ٥٪

**الحل**

$H_0$: مجتمع الدراسة يتبع التوزيع المنتظم (أي أنه لا يوجد فرق بين عدد الكتب المستعارة خلال أيام الأسبوع المختلفة).

$H_1$: مجتمع الدراسة لا يتبع التوزيع المنتظم

التكرار المتوقع إذا كان التوزيع منتظماً $= \frac{١٣٥ + ١١٠ + ١٢٠ + ١١٥ + ١٤٠}{٥}$

$= \frac{٦٢٠}{٥}$

$= ١٢٤$

$$\chi^2 \text{ (للعينة)} = \frac{(١٣٥ - ١٢٤)^٢}{١٢٤} + \frac{(١١٠ - ١٢٤)^٢}{١٢٤} + \frac{(١٢٠ - ١٢٤)^٢}{١٢٤}$$

$$+ \frac{(١١٥ - ١٢٤)^٢}{١٢٤} + \frac{(١٤٠ - ١٢٤)^٢}{١٢٤}$$

$$\chi^٢ = ٥,٤٠٤$$

**بالتعويض في (٤٨ ـ ١ ـ ٧):**

درجات الحرية ν = ٥ − ١ − صفر = ٤

من جدول $\chi^2$ (جدول رقم (٤)) نجد أن

$$\chi^٢_{٤,٠,٠٥} = ٩,٤٨٨$$

وحيث أن $\chi^2$ (للعينـة) $<$ $\chi^2$ (الجدوليـة) فإننـا نقبل الفـرض (أي أن توزيـع عدد الكتب خلال أيام الأسبوع منتظم وبالتالي فإنـه لا يوجـد علاقـة بين اليـوم وعدد الكتب المستعارة).

**مثال ٢**

لمراقبة جودة الإنتاج في مصنع معيّن اختارت دائرة المـراقبة ١٠٠ عينـة عشوائيـة متتـالية حجم كـل منها ٥ وحـدات ووجـدت أن تـوزيـع هـذه العينـات حسب عـدد الوحدات المعيبة في كل منها هو على النحو التالي:

| عدد الوحدات المعيبة | عدد العينات |
|---|---|
| ٠ | ٤٥ |
| ١ | ٣٥ |
| ٢ | ١٠ |
| ٣ | ٧ |
| ٤ | ٢ |
| ٥ | ١ |

**والمطلوب توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات واختبار جودة المطابقة بمستوى معنوية $\alpha$ = ٠,٠١، إذا علم أن نسبة المعيب في جميع هذه العينات تساوي ٠,٠٥**

**الحل**

$H_0$ : عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع ذي الحدين

$H_1$ : عدد الوحدات المعيبة لا يتبع توزيع ذي الحدين

كخطوة أولى نحن بحاجة إلى التكرارات المتوقعة والتي يمكن حسابها كما هو موضح في الجدول التالي:

| عدد الوحدات المعيبة (ر) | ح (س = ر) | | التكرارات المتوقعة |
|---|---|---|---|
| ٠ | ٥ق٠ (٠,٠٥)$^{٠}$ (٠,٩٥)$^{٥}$ | = ٠,٧٧٣٨ | ٧٧,٣٨ |
| ١ | ٥ق١ (٠,٠٥)$^{١}$ (٠,٩٥)$^{٤}$ | = ٠,٢٠٣٦ | ٢٠,٣٦ |
| ٢ | ٥ق٢ (٠,٠٥)$^{٢}$ (٠,٩٥)$^{٣}$ | = ٠,٠٢١٤ | ٢,١٤ |
| ٣ | ٥ق٣ (٠,٠٥)$^{٣}$ (٠,٩٥)$^{٢}$ | = ٠,٠٠١١ | ٠,١١ |
| ٤ | ٥ق٤ (٠,٠٥)$^{٤}$ (٠,٩٥)$^{١}$ | = ٠,٠٠٠١ | ٠,٠١ |
| ٥ | ٥ق٥ (٠,٠٥)$^{٥}$ (٠,٩٥)$^{٠}$ | = صفر | صفر |
| المجموع | | ١,٠٠٠٠ | ١٠٠,٠٠ |

$$\chi^2 \text{ (للعينة)} = \frac{(٤٥ - ٧٧,٣٨)^2}{٧٧,٣٨} + \frac{(٣٥ - ٢٠,٣٦)^2}{٢٠,٣٦} + \frac{(١٠ - ٢,١٤)^2}{٢,١٤} + \frac{(١٠ - ٠,١٢)^2}{٠,١٢}$$

$$= ١٣,٥٥٠ + ١٠,٥٢٧ + ٢٨,٨٦٩ + ٨١٣,٤٥٣$$

$$= ٨٦٦,٣٩٩$$

وبالتعويض في (٤٨ ـ ١ ـ ٧) فإن درجات الحرية ٧ = ٤ − ١ − صفر = ٣ حيث ضممنا قيم المتغير ٣ ، ٤ ، ٥ في قيمة واحدة.

ومن جدول توزيع كاي تربيع (جدول رقم (٤)) فإن

$$\chi^2_{٣,٠,٠١} = ١١,٣٤٠$$

وبما أن $\chi^2$ (للعينة) > $\chi^2$ (الجدولية) فإننا نرفض الفرض (أي عدد الوحدات المعيبة في إنتاج هذا المصنع لا يتبع توزيع ذي الحدين)

**مثال ٣**

بالرجوع إلى بيانات المثال المعطى في الفقرة (٣ ـ ١ ـ ٤)، المطلوب اختبار جودة مطابقة توزيع بواسون لهذه البيانات.

**الحل**

يمكن صياغة الفرضين العدمي والبديل على النحو التالي:

$H_0$ : عدد حوادث العمل يتبع توزيع بواسون

$H_1$ : عدد حوادث العمل لا يتبع توزيع بواسون

التكرارات المشاهدة من سجلات المصنع والتكرارات المتوقعة التي تمّ حسابها بافتراض أن عدد حوادث العمل يتبع توزيع بواسون مبيّنة في الجدول التالي:

| عدد الحوادث | التكرارات المشاهدة (ك) | التكرارات المتوقعة (ك′) |
|---|---|---|
| ٠ | ١٢٦٠ | ١٠٤٤ |
| ١ | ٤٣٦ | ٦٧٨ |
| ٢ | ١٤٤ | ٢٢٠ |
| ٣ | ٨٨ | ٤٨ |
| ٤ | ٥٢ | ٨ |
| ٥ | ١٦ | ٢ |
| ٦ | ٤ | صفر |
| المجموع | ٢٠٠٠ | ٢٠٠٠ |

$$\chi^2 \text{ (للعينة)} = \frac{(١٢٦٠ - ١٠٤٤)^2}{١٠٤٤} + \frac{(٤٣٦ - ٦٧٨)^2}{٦٧٨} + \frac{(١٤٤ - ٢٢٠)^2}{٢٢٠} + \frac{(٨٨ - ٤٨)^2}{٤٨} + \frac{(٥٢ - ٨)^2}{٨} + \frac{(٢٠ - ٢)^2}{٢}$$

$$= ٥٩٤,٦٥$$

حيث أهملنا العدد الأخير (٦) وأضفنا تكراره المشاهد إلى التكرار السابق.

بالتعويض في (٤٨ ـ ١ ـ ٧) نجد أن:

درجات الحرية ٧ = ٦ − ١ − ١ = ٤

وإذا استخدمنا مستوى معنوية ٥٪ فإن $\chi^{2}_{٤،٠,٠٥}$ = ٩,٤٨٨، وحيث أن $\chi^{2}$ (للعينة) > $\chi^{2}$ (الجدولية)فإننا نرفض الفرض (أي أن عدد حوادث العمل لا يتبع توزيع بواسون).

**ثانياً اختبار الاستقلال**

إفرض أن لدينا المتغيرين س، ص وإن المتغير س يأخذ الأوجه $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ، ، $س_{م}$ والمتغير ص يأخذ الأوجه $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، . . . ، $ص_{ن}$ وبوبنا البيانات التي تتعلق بهذين المتغيرين في جدول مزدوج (جدول توافق) على النحو التالي:

| ص<br>س | $ص_{١}$ | $ص_{٢}$ | .... | $ص_{ر}$ | .... | $ص_{ن}$ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $س_{١}$ | $ك_{١١}$ | $ك_{٢١}$ | .... | $ك_{١ر}$ | .... | $ك_{١ن}$ | $ك_{١.}$ |
| $س_{٢}$ | $ك_{١٢}$ | $ك_{٢٢}$ | .... | $ك_{٢ر}$ | .... | $ك_{٢ن}$ | $ك_{٢.}$ |
| . | . | . | | . | | . | . |
| . | . | . | | . | | . | . |
| . | . | . | | . | | . | . |
| . | . | . | | . | | . | . |
| $س_{و}$ | $ك_{و١}$ | $ك_{و٢}$ | .... | $ك_{ور}$ | .... | $ك_{ون}$ | $ك_{و.}$ |
| . | . | . | | . | | . | . |
| . | . | . | | . | | . | . |
| $س_{م}$ | $ك_{م١}$ | $ك_{م٢}$ | .... | $ك_{مر}$ | .... | $ك_{من}$ | $ك_{م.}$ |
| المجموع | $ك_{.١}$ | $ك_{.٢}$ | .... | $ك_{.ر}$ | .... | $ك_{.ن}$ | $ك_{..}$ |

حيث $ك_{ور}$ التكرار المشاهد للمفردات التي تتصف بالصفة وللمتغير س والصفة ر للمتغير ص، $ك_{و.}$ التكرار المشاهد للمفردات التي تتصف بالصفة وللمتغير س بصرف النظر عن ص (التوزيع الهامشي للمتغير س) ، $ك_{.ر}$ (التكرار المشاهد للمفردات التي تتصف بالصفة ر للمتغير ص بصرف النظر عن س (التوزيع الهامشي للمتغير ص) ، $ك_{..}$ مجموع التكرارات المشاهدة. نختبر الفرض القائل باستقلال المتغيرين س، ص باتباع الخطوات التالية:

١ ـ حساب احتمال أن تتصف أية مفردة مختارة عشوائياً بالصفة وللمتغير س

والصفة ر للمتغير ص كما يلي:

ح (الصفة وللمتغير س) $= \frac{ك_{و.}}{ك_{..}}$ و = ١، ٢، .... م،

ح (الصفة ر للمتغير ص) $= \frac{ك_{.ر}}{ك_{..}}$ ر = ١، ٢، ... ن،

وبافتراض أن س، ص مستقلان:

ح (الصفة وللمتغير س، الصفة ر للمتغير ص) $= \frac{ك_{و.}}{ك_{..}} \times \frac{ك_{.ر}}{ك_{..}}$ (٤٩ ـ ١ ـ ٧)

٢ ـ حساب التكرارات المتوقعة (بافتراض أن س، ص مستقلان)، باستخدام المعادلة التالية:

$ك'_{ور} = \frac{ك_{و.}}{ك_{..}} \times \frac{ك_{.ر}}{ك_{..}} \times ك_{..}$ و = ١، ٢، ... م،
ر = ١، ٢، ... ن،

$= \frac{ك_{و.} \times ك_{.ر}}{ك_{..}}$ (٥٠ ـ ١ ـ ٧)

٣ ـ حساب قيمة $\chi^2$ (للعينة) باستخدام المعادلة التالية:

$\chi^2$ (للعينة) $= \sum_{و=١}^{م} \sum_{ر=١}^{ن} \frac{(ك_{ور} - ك'_{ور})^2}{ك'_{ور}}$ (٥١ ـ ١ ـ ٧)

٤ ـ حساب درجات الحرية من المعادلة التالية

درجات الحرية (٧) = (م − ١) (ن − ١) (٥٢ ـ ١ ـ ٧)

أي (عدد الصفوف − ١) × (عدد الأعمدة − ١).

٥ ـ نستخرج قيمة $\chi^2$ (الجدولية) من جدول رقم (٤) عند درجات حرية ٧ ومستوى معنوية $\alpha$.

٦ ـ إذا كانت $\chi^2$ (للعينة) ≥ $\chi^2$ (الجدولية) فإننا نقبل الفرض (أي أن المتغيرين س، ص مستقلان).

**مثال**

يدعي أحد منتجي الأدوية أن علاجاً معيناً (أ) له أثر كبير في شفاء أحد

الأمراض. وللتحقق من صحة هذا الإدعاء فقد اجريت تجربة على ١٦٤ مصاباً بهذا المرض بحيث أعطي نصفهم العلاج (أ) والنصف الثاني علاجاً آخر (ب) وكانت نتيجة التجربة على النحو التالي:

| حالة المريض / نوع العلاج | تحسنت | ساءت | بقيت على حالها | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| أ | ٥٢ | ١٠ | ٢٠ | ٨٢ |
| ب | ٤٤ | ١٢ | ٢٦ | ٨٢ |
| المجموع | ٩٦ | ٢٢ | ٤٦ | ١٦٤ |

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ صحة إدعاء المنتج.

الحل

$$ك'_{١١} = \frac{٨٢ \times ٩٦}{١٦٤} = ٤٨$$

$$ك'_{٢١} = \frac{٨٢ \times ٢٢}{١٦٤} = ١١$$

$$ك'_{٣١} = \frac{٨٢ \times ٤٦}{١٦٤} = ٢٣$$

$$ك'_{١٢} = \frac{٨٢ \times ٩٦}{١٦٤} = ٤٨$$

$$ك'_{٢٢} = \frac{٨٢ \times ٢٢}{١٦٤} = ١١$$

$$ك'_{٣٢} = ١٦٤٨٢ \times ٤٦ = ٢٣$$

$$\chi^{٢}\ (\text{للعينة}) = \frac{(٤٨ - ٥٢)^{٢}}{٤٨} + \frac{(١١ - ١٠)^{٢}}{١١} + \frac{(٢٣ - ٢٠)^{٢}}{٢٣} + \frac{(٤٨ - ٤٤)^{٢}}{٤٨} + \frac{(١١ - ١٢)^{٢}}{١١} + \frac{(٢٣ - ٢٦)^{٢}}{٢٣}$$

$= ٠,٣٣٣ + ٠,٠٩١ + ٠,٣٩١$

$+ ٠,٣٣٣ + ٠,٠٩١ + ٠,٣٩١$

$= ١,٦٣٠$

درجات الحرية $= (٢ - ١)(٣ - ١) = ٢$

$\chi^2_{٢،٠,٠٥} = ٥,٩٩١$

وحيث أن $\chi^2$ (للعينة) $<$ $\chi^2$ (الجدولية) فإننا نقبل الفرض القائل بأن نوع العلاج مستقل عن حالة المرض (أي أن إدعاء المنتج غير صحيح).

# الفصل الثاني

## الاختبارات غير البارامترية

### (١ - ٢ - ٧) مقدمة

تحدثنا في الفصل الأول من هذا الباب عن الإختبارات البارامترية (المعلمية) وهي الإختبارات التي لا يمكن إجرائها إلاّ إذا افترضنا بأن العينات العشوائية مأخوذة من مجتمعات لها توزيع احتمالي معروف. وفي كل الحالات السابقة كانت الاختبارات تتعلق بمعالم هذه المجتمعات سواء كانت متوسطات أو تباينات أو نسب.

وفي هذا الفصل فإننا نتعرض بالدراسة لأنواع أخرى من الاختبارات لا يتطلب إجراؤها معرفة التوزيع الإحتمالي لمجتمع الدراسة، تسمى الإختبارات غير البارامترية (غير المعلمية)، وسوف ندرس منها:

١ - اختبارات معنوية معامل ارتباط الرتب — Rank Correlation Cœfficient Test

٢ - اختبار الإشارة — The Sign Test

٣ - اختبار U لمان - وتني — The Mann-Whitney U-Test

٤ - اختبار H لكروسكال - ووالاس — The Kruskal-Wallis H-Test

ومن الجدير بالذكر أن تطبيق هذه الاختبارات لا يستلزم توافر شروط كثيرة عن مجتمع الدراسة كما إنها تمتاز بسهولة الحساب.

### (٢ - ٢ - ٧) اختبار معامل ارتباط الرتب

إذا اخترنا عينة عشوائية حجمها ن من أحد المجتمعات (مجتمع العمال في إحدى الشركات،مجتمع الطلاب في إحدى المدارس، مجتمع الأسر في إحدى المدن، . . . الخ) وقمنا بقياس متغيرين لكل مفردة منها (الطول والوزن، مستوى التعليم ومستوى الإداء، الدخل والإنفاق على السكن، . . . الخ) فإننا نحصل على مجموعة من أزواج

المشاهدات المتناظرة، (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) . . . (سن ، صن)، وإذا كنّا لا نعلم بأن لهذين المتغيرين معاً توزيعاً طبيعياً ثنائياً (وهو الشرط اللازم لحساب معامل ارتباط بيرسون) فإنه لا يزال بالإمكان قياس الإرتباط بينهما باستعمال معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (ر) والذي يعرف كما يلي:

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)} \qquad (٥٣ - ٢ - ٧)$$

حيث ف = الفرق بين رتبة س ورتبة ص

ن = عدد أزواج القيم

ويتم إجراء الاختبار بإتباع الخطوات التالية:

١ ـ صياغة الفرض والذي يمكن أن يكون بإحدى الصور التالية:

اختبار الطرفين:

$H_0$ : معامل ارتباط الرتب $\rho$ = صفر

$H_1$ : رتب س غير مستقلة عن رتب ص، أي أن معامل ارتباط الرتب $\rho$ $\neq$ صفر

اختبار الطرف العلوي:

$H_0$ : معامل ارتباط الرتب $\rho \leqq$ صفر

$H_1$ : يوجد ارتباط طردي بين رتب س ورتب ص، أي أن $\rho >$ صفر

اختبار الطرف السفلي:

$H_0$ : معامل ارتباط الرتب $\rho \geqq$ صفر

$H_1$ : يوجد ارتباط عكسي بين رتب س ورتب ص، أي أن $\rho <$ صفر

٢ ـ حساب معامل ارتباط الرتب من المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٧).

٣ ـ تحديد مستوى المعنوية $\alpha$.

٤ ـ ايجاد القيمة الحرجة من جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (٧) ) عند مستوى معنوية $\alpha$ وعدد أزواج القيم ن، عندما ن < ٢٥. أما إذا كانت ن $\geqq$ ٢٥ فإنه يمكن تقريب توزيع المعاينة للمعامل ر بتوزيع معتاد توقعه صفر وتباينه $\frac{١}{ن - ١}$، وفي هذه الحالة فإننا نجد قيمة ي من جدول التوزيع المعتاد العياري عند مستوى المعنوية المحدد.

٥ ـ مقارنة قيمة ر الفعلية بالقيم أو القيمة الحرجة إذا كانت ن < ٢٥، وبقيم ي الجدولية إذا كانت ن ≥ ٢٥ وإتخاذ القرار على النحو التالي:

اختبار ذو طرفين: نقبل الفرض إذا وقعت قيمة ر بين القيمتين الحرجتين (عندما ن < ٢٥) أو بين $ى_{\frac{\alpha}{٢}}$، $ى_{١-\frac{\alpha}{٢}}$ (عندما ن ≥ ٢٥).

اختبار الطرف العلوي: نقبل الفرض إذا كانت قيمة ر أقل من القيمة الحرجة (عندما ن < ٢٥) أو أقل من $ى_{١-\alpha}$(عندما ن ≥ ٢٥).

اختبار الطرف السفلي: نقبل الفرض إذا كانت قيمة ر أكبر من القيمة الحرجة (عندما ن < ٢٥) أو أكبر من $ى_{\alpha}$ (عندما ن ≥ ٢٥).

ومن الجدير بالذكر إنه يمكن استخدام جداول التوزيع المعتاد القياسي حتى ولو كانت ن < ٢٥.

**مثال ١**

لدراسة العلاقة بين مستوى التعليم ومستوى الأداء بين الموظفين في إحدى الشركات، اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٠ موظفين وتمّ ترتيبهم حسب مستوى التعليم ومستوى الأداء كما هو مبين فيما يلي:

| رقم الموظف | رتبة مستوى التعليم س′ | رتبة مستوى الأداء ص′ | $ف^٢ = (س' - ص')^٢$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ١ | ١ |
| ٢ | ٤ | ٣ | ١ |
| ٣ | ٣ | ٢ | ١ |
| ٤ | ١ | ٥ | ١٦ |
| ٥ | ٦ | ٤ | ٤ |
| ٦ | ٨ | ٧ | ١ |
| ٧ | ٧ | ٩ | ٤ |
| ٨ | ١٠ | ٨ | ٤ |
| ٩ | ٩ | ٦ | ٩ |
| ١٠ | ٥ | ١٠ | ٢٥ |
| المجموع | | | ٦٦ |

اختبر بمستوى معنوية ١٠٪ الفرض القائل بأن مستوى التعليم مستقل عن مستوى الأداء علماً بأنه لا يوجد لدينا أية معلومات عن التوزيع الاحتمالي لهذين المستويين.

الحل:

سوف نستخدم في هذه الحالة اختبار معامل ارتباط الرتب، والذي نحسبه بالتعويض من الجدول السابق في المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٧):

$$= ١ - \frac{٦ \times ٦٦}{١٠ (١٠٠ - ١)} = ١ - ٠,٤٠$$

$$= ٠,٦$$

$H_0$: لا يوجد ارتباط بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى الأداء أي أن $\rho$ = صفر

$H_1$: يوجد ارتباط بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى الاداء أي أن $\rho \neq$ صفر

ومن جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (٧))، عندما $\frac{\alpha}{٢}$ = ٠,٠٥، ن = ١٠، نجد أن القيم الحرجة هي - ٠,٥٦٤، ٠,٥٦٤

وحيث أن قيمة ر لا تقع بين هاتين القيمتين فإننا نرفض الفرض (أي أنه يوجد علاقة بين رتب مستوى التعليم ورتب مستوى الأداء).

**مثال ٢:**

لدراسة العلاقة بين علامات طلبة كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية في مادة مبادىء الإحصاء ١٠١ وعلاماتهم في مادة مبادىء الاقتصاد ١١٠ اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٢ من الطلاب الذين أجري لهم الامتحان الأول في هاتين المادتين فكانت علاماتهم:

| رقم الطالب | علامة أح ١٠١ س | علامة أ ق ١١٠ ص |
|---|---|---|
| ١ | ٦٠ | ٦٥ |
| ٢ | ٧٠ | ٦٤ |
| ٣ | ٨٥ | ٧٦ |
| ٤ | ٥٦ | ٥٠ |
| ٥ | ٩٢ | ٨٤ |

| رقم الطالب | علامة أح ١٠١ س | علامة أ ق ١١٠ ص |
|---|---|---|
| ٦ | ٥٧ | ٦٢ |
| ٧ | ٧٦ | ٦٨ |
| ٨ | ٤٤ | ٥١ |
| ٩ | ٨٨ | ٨٢ |
| ١٠ | ٦٤ | ٥٨ |
| ١١ | ٩٣ | ٨٣ |
| ١٢ | ٦٨ | ٦٦ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجود علاقة طردية بين رتب الطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠ وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحل

| رقم الطالب | رتب الطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ س′ | رتب الطلاب في مبادىء الاقتصاد ١١٠ ص′ | ف$^2$ = (س′- ص′)$^2$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٩ | ٧ | ٤ |
| ٢ | ٦ | ٨ | ٤ |
| ٣ | ٤ | ٤ | صفر |
| ٤ | ١١ | ١٢ | ١ |
| ٥ | ٢ | ١ | ١ |
| ٦ | ١٠ | ٩ | ١ |
| ٧ | ٥ | ٥ | صفر |
| ٨ | ١٢ | ١١ | ١ |
| ٩ | ٣ | ٣ | صفر |
| ١٠ | ٨ | ١٠ | ٤ |
| ١١ | ١ | ٢ | ١ |
| ١٢ | ٧ | ٦ | ١ |
| المجموع | | | ١٨ |

بالتعويض في (٥٣ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٨}{١٢ (١٤٤ - ١)} = ١ - ٠,٠٦٣$$

$$= ٠,٩٣٧$$

$H_o$: الارتباط بين رتب الطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠ عكسي أو يساوي صفر، أي أن $\rho \leqslant$ صفر

$H_1$: الارتباط بين رتب الطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠ طردي أي أن $\rho >$ صفر

ومن جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (٧)) عندما $\alpha$ = ٠,٠٥، ن= ١٢ فأن القيمة الحرجة هي ٠,٥٠٤

وحيث أن ر الفعلية أكبر من القيمة الحرجة فإننا نرفض $H_o$ (أي أنه يوجد ارتباط طردي بين رتب الطلاب في مبادىء الإحصاء ١٠١ ورتبهم في مبادىء الاقتصاد ١١٠).

**مثال ٣:**

لدراسة العلاقة بين دخل الأسرة وعدد الأطفال الأحياء الذين تمّ انجابهم فيها، اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٨ أسرة من تلك التي تقطن في مدينة ما وقام بترتيب هذه الأسر حسب دخل الأسرة وعدد الأطفال الذين تمّ انجابهم لكل منها كما هو مبينّ في الجدول التالي:

| رقم الأسرة | رتب الأسر حسب الدخل س′ | رتب الأسر حسب عدد الأطفال ص′ | ف = $(س' - ص')^2$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ١٨ | ٢٥٦ |
| ٢ | ٤ | ١٦ | ١٤٤ |
| ٣ | ٦ | ١٠ | ١٦ |
| ٤ | ١٠ | ٧ | ٩ |
| ٥ | ١٨ | ١ | ٢٨٩ |

| رقم الأسرة | رتب الأسر حسب الدخل $\bar{س}$ | رتب الأسر حسب عدد الأطفال $\bar{ص}$ | ف$^2$ = (س′ - ص′)$^2$ |
|---|---|---|---|
| ٦ | ١٢ | ٣ | ٨١ |
| ٧ | ١٣ | ٦ | ٤٩ |
| ٨ | ١٧ | ٢ | ٢٢٥ |
| ٩ | ٥ | ٩ | ١٦ |
| ١٠ | ٨ | ٤ | ١٦ |
| ١١ | ٣ | ١٧ | ١٩٦ |
| ١٢ | ١ | ١٥ | ١٩٦ |
| ١٣ | ٧ | ١١ | ١٦ |
| ١٤ | ٩ | ٥ | ١٦ |
| ١٥ | ١١ | ٨ | ٩ |
| ١٦ | ١٤ | ١٢ | ٤ |
| ١٧ | ١٥ | ١٣ | ٤ |
| ١٨ | ١٦ | ١٤ | ٤ |
| المجموع | | | ١٥٤٦ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجود علاقة عكسية بين دخل الأسرة وعدد الأطفال الأحياء الذين تمّ انجابهم لكل منها، علماً بأن الباحث لا يعرف شيئاً عن التوزيع الإحتمالي المشترك لهذين المتغيرين.

الحـــل:

بالتعويض في المعادلة (٥٣ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٥٤٦}{١٨ \ (٣٢٤ - ١)} = ١ - ١٫٥٩٥$$

$$= - ٠٫٥٩٥$$

$H_o$ : الارتباط بين رتب الأسر حسب الدخل ورتبها حسب عدد الأطفال الذين ولدوا فيها طردي أو يساوي صفر، أي أن $\rho \geqslant$ صفر

$H_o$ : الارتباط بين رتب الأسر حسب الدخل ورتبها حسب عدد الأطفال الاحياء الذين ولدوا فيها عكسي، أي أن $\rho$ < صفر

ومن جدول معاملات سبيرمان (جدول رقم (٧)) عندما $\alpha$ = ٠١ر٠ ، ن = ١٨ فإن القيمة الحرجة هي -٠,٥٦٤

وحيث أن ر الفعلية أصغر من القيمة الحرجة لذلك نرفض $H_0$ (أي أنه يوجد ارتباط عكسي بين رتب الأسر حسب الدخل ورتبها حسب عدد الأطفال الأحياء الذين ولدوا فيها).

**مثـــال ٤ :**

لدراسة العلاقة بين الدخل ومستوى التعليم في إحدى الشركات اختيرت عينة حجمها ٣٠ مستخدماً تم ترتيبهم حسب الأجرة الشهرية ومستوى التعليم فحصلنا على البيانات التالية:

| رقم المستخدم | رتبة المستخدم حسب مستوى الدخل ص′ | رتبة المستخدم حسب مستوى التعليم س′ | ف٢ =(س′ - ص′)٢ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٥ | ٩ |
| ٢ | ٤ | ٦ | ٤ |
| ٣ | ٦ | ٤ | ٤ |
| ٤ | ٣ | ١٠ | ٤٩ |
| ٥ | ٨ | ٨ | صفر |
| ٦ | ٩ | ١٢ | ٩ |
| ٧ | ١ | ٢ | ١ |
| ٨ | ١٤ | ٣ | ١٢١ |
| ٩ | ٢٠ | ٢٨ | ٦٤ |
| ١٠ | ٢٦ | ٢٠ | ٣٦ |
| ١١ | ٢٨ | ٢٣ | ٢٥ |
| ١٢ | ٣٠ | ١٦ | ١٩٦ |
| ١٣ | ١٦ | ١٨ | ٤ |

| رقم المستخدم | رتبة المستخدم حسب مستوى الداخل ص′ | رتبة المستخدم حسب مستوى التعليم س′ | ف$^{٢}$ = (س′ - ص′) |
|---|---|---|---|
| ١٤ | ٥ | ٢٢ | ٢٨٩ |
| ١٥ | ١٠ | ١٧ | ٤٩ |
| ١٦ | ٧ | ١ | ٣٦ |
| ١٧ | ٢٦ | ١٥ | ١٢١ |
| ١٨ | ١٢ | ٧ | ٢٥ |
| ١٩ | ١١ | ٩ | ٤ |
| ٢٠ | ١٣ | ١١ | ٤ |
| ٢١ | ١٥ | ٣٠ | ٢٢٥ |
| ٢٢ | ١٧ | ١٣ | ١٦ |
| ٢٣ | ٢١ | ٢٦ | ٢٥ |
| ٢٤ | ٢٥ | ١٤ | ١٢١ |
| ٢٥ | ٢٤ | ١٩ | ٢٥ |
| ٢٦ | ١٨ | ٢١ | ٩ |
| ٢٧ | ٢٣ | ٢٥ | ٤ |
| ٢٨ | ٢٧ | ٢٤ | ٩ |
| ٢٩ | ١٩ | ٢٧ | ٦٤ |
| ٣٠ | ٢٢ | ٢٩ | ٤٩ |
| المجموع | | | ١٥٩٧ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد ارتباط بين رتبة المستخدم حسب مستوى الدخل ورتبته حسب مستوى التعليم بمستوى معنوية ٥٪.

**الحـــل:**

بالتعويض في (٥٣ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن:

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٥٩٧}{٣٠ (٩٠٠ - ١)} = ١ - \frac{٩٥٨٢}{٢٦٩٧٠}$$

$$= ١ - ٠ر٣٥٥ = ٠ر٦٤٥$$

$H_0$ : ρ = صفر، $H_1$ : ρ ≠ صفر

وبما أن ن > ٢٥ فإن ر تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين $\frac{١}{٢٩}$ ،

أي أن

$$ى = (٠,٦٤٥ - صفر) \div \frac{١}{\sqrt{٢٩}} = ٣,٤٧٣$$

ومن جدول التوزيع المعتاد رقم (٣) نجد أن

$ى_{٠,٠٢٥} = - ١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = + ١٩٦$

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين -١,٩٦ ، ١,٩٦ فإننا نرفض $H_0$ (أي أنه يوجد علاقة بين مستوى الدخل ومستوى التعليم).

**(٣ ـ ٢ ـ ٧) اختبار الإشـــارة**

**أولاً: حالة المجتمع الواحد**

يستخدم اختبار الإشارة لمجتمع واحد لاختبار الفرض القائل بأن وسيط المجتمع ويساوي قيمة مفترضة و٥ . هذا ويعتبر اختبار الإشارة واحداً من أبسط الاختبارات الإحصائية، حيث نحتاج لتطبيقه توافر الشرطين العامين التاليين:

١ ـ المتغير الذي نقوم بدراسته متصل

٢ ـ المجتمع الذي نقوم بدراسته له وسيط

فإذا أردنا مثلاً اختبار الفرض

: $H_0$ : و = و٥

مقابل الفرض البديل $H_1$ : و > و٥

فإنه إذا كان الفرض صحيحاً فإننا نتوقع أن ٥٠٪ من القيم المشاهدة أصغر من و٥ ، وهذا يعني أنه إذا كان $H_0$ صحيحاً فإن احتمال أن تزيد أية قيمة مشاهدة عن و٥ يساوي ½ وبالتالي إذا كان عدد القيم المشاهدة التي تقل عن و٥ كبيراً فإننا نتردد في قبول $H_0$ ونكون أكثر ميلاً لقبول $H_1$ .

ولتطبيق اختبار الإشارة فإننا نطرح القيمة المفترضة و٥ من جميع القيم المشاهدة ونسجل الفرق مع إشارة عملية الطرح. فإذا كان $H_0$ صحيحاً فإننا نتوقع أن نحصل

على عدد من الإشارات الموجبة متساوٍ مع عدد الإشارات السالبة، أما إذا كان عدد الإشارات الموجبة أكبر من عدد الإشارات السالبة أو العكس فإننا نميل إلى رفض $H_0$ وقبول $H_1$ . والمطلوب هو وضع قاعدة يمكن على أساسها الحكم بقبول أو رفض $H_0$ تبعاً لعدد الإشارات السالبة وعدد الإشارات الموجبة التي نحصل عليها.

إن عدد الإشارات السالبة (أو الموجبة) في هذه الحالة يتبع توزيع ذي الحدين (أو التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين). فإذا كان $H_0$ صحيحاً (و = و٠) فإن عدد الإشارات السالبة أو الموجبة يتبع توزيع ثنائي ذي الحدين بمعلمتين ن (عدد المشاهدات).

ح = ½ ، وحيث أن ح = ½ فإنه يمكن استخدام التقريب الطبيعي لهذا التوزيع بمتوسط $\frac{ن}{٢}$ ، وتباين $\frac{ن}{٤}$ حتى ولو كانت ن صغيرة.

وإذا فرضنا أن عدد الإشارات الموجبة هو س فإنه يمكن حساب احتمال أن يكون المتغير س أقل من ر على النحو التالي:

$$ح\,(س \leqslant ر) = ح\left(س < ر + \frac{١}{٢}\right) \qquad (٧ - ٢ - ٥٤)$$

وفي حالة استخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين فإن (٥٤ - ٢ - ٧) تؤول إلى

$$ح\,(س \leqslant ر) = ح\left(ى < \frac{ر + \frac{١}{٢} - \frac{ن}{٢}}{\sqrt{\frac{ن}{٤}}}\right) \qquad (٧ - ٢ - ٥٥)$$

وإذا كان الاختبار ذا طرفين وكان عدد الإشارات الموجبة ر < $\frac{ن}{٢}$ فإننا نحسب قيمة ى من الدالة الإختبارية التالية:

$$ى = \frac{(ر + \frac{١}{٢}) - \frac{ن}{٢}}{\sqrt{\frac{ن}{٤}}} \qquad (٧ - ٢ - ٥٦)$$

ونرفض $H_0$ إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٦ - ٢ - ٧) أقل من $ى_{\frac{ب}{٢}}$ . أما إذا كان عدد الإشارات الموجبة ر ⩾ $\frac{ن}{٢}$ فإننا نحسب قيمة ى من الدالة الإختبارية التالية:

$$ى = \frac{(ر - \frac{١}{٢}) - \frac{ن}{٢}}{\sqrt{\frac{ن}{٤}}} \qquad (٧ - ٢ - ٥٧)$$

ونرفض الفرض إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) أكبر من أو تساوي $ى_{١-\frac{\alpha}{٢}}$

أما إذا كان الاختبار ذا ظرف واحد سفلي فإننا نرفض الفرض إذا كانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٦ ـ ٢ ـ ٧) أقل من $ى_{\alpha}$ .

وأخيراً إذا كان الإختبار ذا طرف علوي فإننا نرفض الفرض إذا كـانت قيمة ى المحسوبة من المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) أكبر من قيمة $ى_{١-\alpha}$

**مثـــال ١ :**

البيانات التالية تمثل أوزان ١٢ طالباً بالكيلوغرام:

٦٥ ، ٦٨ ، ٥٤ ، ٥١ ، ٧٠ ، ٧٢ ، ٦١ ، ٥٨ ، ٦٨ ، ٧٥ ، ٦٣ ، ٥٩

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن الوزن الوسيط لمجتمـع هؤلاء الطلاب هـو ٦٢ كيلوغرام وذلك بمستوى معنوية ٥٪ .

**الحـــل:**

نطرح القيمة ٦٢ من جميع الأوزان ونسجّل الفروق مع إشارتها كما يلي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ٦٥ - ٦٢ = +٣ | ٦٨ - ٦٢ = +٦ | ٥٤ - ٦٢ = -٨ | ٥١ ـ ٦٢ = -١١ |
| ٧٠ - ٦٢ = +٨ | ٧٢ - ٦٢ = +١٠ | ٦١ ـ ٦٢ = - ١ | ٥٨ - ٦٢ = -٤ |
| ٦٨ - ٦٢ = +٦ | ٧٥ - ٦٢ = +١٣ | ٦٣ ـ ٦٢ = +١ | ٥٩ - ٦٢ = -٣ |

عدد الإشارات الموجبة ر = ٧

عدد الإشارات السالبة ن - ر = ٥

وحيث أن الاختبار ذو طرفين فإن الفرضين العدمي والبديل هما

$H_0$ : و = ٦٢

$H_1$ : و $\neq$ ٦٢

وحيث أن ر > $\frac{ن}{٢}$ $\left(٧ > \frac{١٢}{٢}\right)$

فإننا نجد قيمة ى بالتعويض في المعادلة (٥٧ ـ٢ـ ٧)

$$ى = \frac{\left(٧ - \frac{١}{٢}\right) - \frac{١٢}{٢}}{\sqrt{\frac{١٢}{٤}}} = \frac{٦,٥ - ٦}{١,٧٣} = \frac{٠,٥}{١,٧٣} = ٠,٢٨٩$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

ى٠,٠٢٥ = - ١,٩٦

ى٠,٩٧٥ = ١,٩٦

وبما أن قيمة ى تقع بين -١,٩٦ ، ١,٩٦ فإننا نقبل الفرض (أي أن الوزن الوسيط لمجتمع الطلاب يمكن أن يكون ٦٢ كيلوغراماً).

**مثـال ٢ :**

اختار باحث عينة عشوائية حجمها ١٠ من الأطفال حديثي الولادة في مدينة ما ووجد أن أوزانهم كما يلي بالكيلوغرام:

٣,٢٥٠، ١,٩٠٠، ٢,٨٥٠، ٣,٠٠٠، ٢,٩٠٠، ٣,٤٠٠، ١,٩٥٠، ٢,٣٨٠، ٢,٧٢٠، ٢,٥٠٠

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن الوزن الوسيط للأطفال عند الولادة في هذه المدينة لا يقل عن ٢,٥٠٠ كيلوغرام وذلك بمستوى معنوية ١٪.

**الحـــل:**

نطرح القيمة ٢,٥٠٠ من جميع الأوزان ونسجل الفروق بالإضافة إلى إشاراتها كما يلي:

٣,٢٥٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٧٥٠

٣,٠٠٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٥٠٠

١,٩٥٠ - ٢,٥٠٠ = - ٠,٥٥٠

٢,٥٠٠ - ٢,٥٠٠ = صفر

١,٩٠٠ - ٢,٥٠٠ = - ٠,٦٠٠

٢,٩٠٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٤٠٠

٢,٣٨٠ - ٢,٥٠٠ = - ٠,١٢٠

٢,٨٥٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٣٥٠

٣,٤٠٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٩٠٠

٢,٧٢٠ - ٢,٥٠٠ = + ٠,٢٢٠

عدد الفروق التي إشارتها موجبة ر = ٦

عدد الفروق التي إشارتها سالبة ن-ر- ١= ٣ (حيث نهمل الفروق الصفرية)
وحيث أن الاختبار ذو طرف واحد سفلي فإنه يمكن صياغته كما يلي:
$H_0$ : و ≧ ٢,٥٠٠ كيلوغرام
$H_1$ : و > ٢,٥٠٠ كيلوغرام

وحيث أن الاختبار ذو طرف سفلي فإننا نجد قيمة ى بالتعويض في (٥٧ ـ ٢ ـ ٧

$$ى = \frac{(٦ - \frac{١}{٢}) - \frac{٩}{٢}}{\sqrt{\frac{٩}{٤}}} = \frac{٥,٥ - ٤,٥}{١,٥} = ٠,٦٦٦$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

$ى_{٠,٠١} = - ٢,٣٣$

وبما أن قيمة ى أكبر من -٢,٣٣ فإننا نقبل الفرض $H_0$ (أي أنه من الممكن أن لا يقل الوزن الوسيط للطفل حديث الولادة في هذه المدينة عن ٢,٥٠٠ كيلوغرام).

**مثـــال ٣:**

البيانات التالية تمثل الدخول الشهرية (بالدينار) لعينة عشوائيـة حجمها ١٦ من العاملين في إحدى الشركات

٦٠ ٦٢ ٩٠ ١١٥ ٦٨ ٧٢ ٨٤ ٦٦ ٧٦ ٨٤ ٩٢
١١٤ ١٠٠ ٥٢ ٥٦ ٨٩

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن الـوسيط لأجور العـمال في هذه الشركـة لا يزيد عن ٧٥ دينار وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

**الحـــل:**

نطرح القيمة ٧٥ من جميع القيم المشاهدة ونسجّل الفروق مع إشارتها كما يلي:

٦٠ - ٧٥ = -١٥   ٦٢ - ٧٥ = -١٣   ٩٠ - ٧٥ = +١٥   ١١٥ - ٧٥ = +٣٠
٦٨ - ٧٥ = -٧   ٧٢ - ٧٥ = -٣   ٨٤ - ٧٥ = +٩   ٦٦ - ٧٥ = -٩
٧٦ - ٧٥ = +١   ٨٤ - ٧٥ = +٩   ٩٢ - ٧٥ = +١٧   ١١٤ - ٧٥ = +٣٩
١٠٠ - ٧٥ = +٢٥   ٥٢ - ٧٥ = -٢٣   ٥٦ - ٧٥ = -١٩   ٨٩ - ٧٥ = +١٤

عدد الاشارات الموجبة ر = ٩
عدد الاشارات السالبة ن - ر = ٧

وحيث أن الاختبار ذو طرف واحد علوي فإنه يمكن صياغته كما يلي:

$H_0$ : و = ٧٥ دينار

$H_1$ : و > ٧٥ دينار

وتحسب قيمة ى بالتعويض في المعادلة (٥٦ ـ ٢ ـ ٧) كما يلي:

$$ى = \frac{(٩ + \frac{١}{٢}) - \frac{١٦}{٢}}{\frac{١٦}{٤}} = \frac{٩,٥ - ٨}{٢} = ٠,٧٥$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

$ى_{٠,٩٥} = ١,٦٥$

وبما أن قيمة ى المحسوبة أقل من ١,٦٥ فإننا نقبل الفرض $H_0$ (أي أنه من الممكن أن لا يزيد الوسيط لأجور العمال في هذه الشركة عن ٧٥ دينار في الشهر).

**ثانياً: حالة المجتمعين**

يستخدم اختبار الإشارة في حالة المجتمعين لاختبار الفرض القائل بأن وسيط المجتمع الأول $و_١$ يساوي وسيط المجتمع الثاني $و_٢$ ولا يختلف الإختبار في هذه الحالة عن اختبار الوسيط لمجتمع واحد وسوف نبيّن ذلك في المثال التالي:

**مثـال ٤:**

لدراسة مستوى أثر دورة تدريبية معيّنة على مستوى إنتاجية العامل في إحدى الشركات اختيرت عينة عشوائية حجمها ٢٠ عاملاً وقيست إنتاجيتهم قبل وبعد الاشتراك في الدورة وكانت إنتاجيتهم (بالوحدة) كما يلي:

| رقم العامل | الانتاجية قبل الدورة | الانتاجية بعد الدورة | التغير في الانتاجية |
|---|---|---|---|
| ١ | ٦ | ٧ | +١ |
| ٢ | ٤ | ٥ | +١ |
| ٣ | ٧ | ٧ | صفر |
| ٤ | ٨ | ٩ | +١ |
| ٥ | ٥ | ٦ | +١ |

| رقم العامل | الانتاجية قبل الدورة | الانتاجية بعد الدورة | التغير في الإنتاجية |
|---|---|---|---|
| ٦ | ٦ | ٨ | + ٢ |
| ٧ | ١٠ | ١١ | + ١ |
| ٨ | ٨ | ٨ | صفر |
| ٩ | ٧ | ٦ | - ١ |
| ١٠ | ٩ | ٨ | - ١ |
| ١١ | ٦ | ٧ | + ١ |
| ١٢ | ٥ | ٦ | + ١ |
| ١٣ | ٤ | ٥ | + ١ |
| ١٤ | ٧ | ٨ | + ١ |
| ١٥ | ١٠ | ٩ | - ١ |
| ١٦ | ٩ | ١١ | + ٢ |
| ١٧ | ٩ | ١٠ | + ١ |
| ١٨ | ٨ | ٩ | + ١ |
| ١٩ | ٧ | ٦ | - ١ |
| ٢٠ | ١٠ | ١٢ | + ٢ |

والمطلوب اختبار صحة ادعاء القائمين على تنظيم هذه الدورة بأنها تؤدي إلى تحسين مستوى إنتاجية العمال في هذه الشركة.

**الحل:**

$H_0$ : و١ = و٢

$H_1$ : و١ $\neq$ و٢

إذا كان $H_0$ صحيحاً فإننا نتوقع أن نحصل على عدد متساو من الإشارات الموجبة والسالبة، وهذا يعني أن احتمال الحصول على إشارة موجبة أو إشارة سالبة يساوي ١/٢ ، وبناء على ذلك فإن عدد الإشارات الموجبة التي يمكن أن نحصل عليها يتبع توزيع ذي الحدين بمعلمتين (ن، ١/٢) وبالتالي فإن متوسط هذا التوزيع وتباينه هما

$\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٤}$ على التوالي. ولاختبار $H_o$ فإنه يمكن استخدام التقريب الطبيعي لتوزيع ذي الحدين من الدالة التالية:

$$ى = \frac{(ر - \frac{١}{٢}) - \frac{ن}{٢}}{\sqrt{\frac{ن}{٤}}} \qquad (٥٧ - ٢ - ٧)$$

حيث ر عدد الإشارات الموجبة.

عدد الإشارات الموجبة ر = ١٤

عدد الإشارات السالبة ن-ر-٢= ٤

وبالتعويض في المعادلة (٥٧ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن:

$$ى = \frac{(١٤ - \frac{١}{٢}) - \frac{١٨}{٢}}{\sqrt{\frac{١٨}{٤}}} = \frac{١٣,٥ - ٩}{\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}} = \frac{٤,٥}{٢,١٢} = ٢,١٢$$

ومن جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) فإن:

$ى_{٠,٠٢٥} = - ١,٩٦$

$ى_{٠,٩٧٥} = ١,٩٦$

وحيث أن قيمة ى لا تقع بين - ١,٩٦ + ١,٩٦ فإننا نرفض الفرض (أي أن ادعاء القائمين على الدورة بأنها ترفع مستوى انتاجية العمال صحيح).

**(٤ ـ ٢ ـ ٧) اختبار U لمان ـ وتني:**

لقد تحدثنا في اختبار الإشارة عن العينتين غير المستقلتين، أما إذا كانت العينتان مستقلتين فإننا نستطيع أن نستخدم اختبارا آخر غير معلمي وهو اختبار U لمان ـ وتني، وإجراء هذا الاختبار لا يتطلب أن يكون مجتمعا الدراسة معتادين.

**مثـال ١:**

لدراسة الفروق بين أجور العمال في شركتين من شركات النسيج اختار باحث عينة عشوائية من العاملين في كل منها وحصل من هاتين العينتين على البيانات التالية:

| أجور العمال في الشركة أ | أجور العمال في الشركة ب |
|---|---|
| ٦٠ | ١٦٥ |
| ١٥٠ | ١٦٤ |
| ٩٠ | ٩٢ |
| ٢١٠ | ٢٠٥ |
| ٧٦ | ٩٦ |
| ٨٦ | ٨٤ |
| ١٢٠ | ١٤٥ |
| ١١٥ | ١٤٠ |
| ١٣٢ | ١٦٠ |
| ١٤٢ | ١٧٥ |
| | ١٨٢ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسط الأجور في الشركة أ يساوي متوسط الأجور في الشركة ب وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحــل:

$H_0$ : متوسط الأجور في الشركة الأولى يساوي متوسط الأجور في الشركة الثانية.

$H_1$ : متوسط الأجور في الشركة الأولى لا يساوي متوسط الأجور في الشركة الثانية.

يتضمن اختبار مان ـ وتني لهذا الفرض اتباع الخطوات التالية:

١ ـ ترتيب القيم في العينتين ترتيباً تصاعدياً، وإعطاء كل قيمة رتبة من الأصغر فالأكبر كما هو مبينّ في الجدول التالي:

| أجور عمال الشركة (أ) | الرتبة | أجور عمال الشركة (ب) | الرتبة |
|---|---|---|---|
| ٦٠ | ١ | ١٦٥ | ١٧ |
| ١٥٠ | ١٤ | ١٦٤ | ١٦ |
| ٩٠ | ٥ | ٩٢ | ٦ |

| أجور عمال الشركة (أ) | الرتبة | أجور عمال الشركة (ب) | الرتبة |
|---|---|---|---|
| ٢١٠ | ٢١ | ٢٠٥ | ٢٠ |
| ٧٦ | ٢ | ٩٦ | ٧ |
| ٨٦ | ٤ | ٨٤ | ٣ |
| ١٢٠ | ٩ | ١٤٥ | ١٣ |
| ١١٥ | ٨ | ١٤٠ | ١١ |
| ١٣٢ | ١٠ | ١٦٠ | ١٥ |
| ١٤٢ | ١٢ | ١٧٥ | ١٨ |
| | | ١٨٢ | ١٩ |
| مجموع الرتب $م_١$ | = ٨٦ | $م_٢$ = | ١٤٥ |

٢ ـ تجميع رتب مشاهدات العينة الأولى وليكن هذا المجموع $م_١$ وتجميع رتب مشاهدات العينة الثانية وليكن هذا المجموع $م_٢$ ($م_١$ = ٨٦، $م_٢$ = ١٤٥).

٣ ـ التعويض في صيغة اختبار مان ـ وتني التالية:

$$U_١ = ن_١ ن_٢ + \frac{ن_١ (ن_١ + ١)}{٢} - م_١ \qquad (٧ - ٢ - ٥٨)$$

أو
$$U_٢ = ن_١ ن_٢ + \frac{ن_٢ (ن_٢ + ١)}{٢} - م_٢ \qquad (٧ - ٢ - ٥٩)$$

حيث $ن_١$ حجم العينة الأولى، $ن_٢$ حجم العينة الثانية

وإذا اخترنا المعادلة (٥٨ ـ ٢ ـ ٧) فإن)

$$U_١ = ١٠ \times ١١ + \frac{١٠ \times (١٠ + ١)}{٢} - ٨٦$$

$$= ١١٠ + ٥٥ - ٨٦ = ٧٩$$

$$U_٢ = ١٠ \times ١١ + \frac{١١(١١+١)}{٢} - ١٤٥$$

$$= ١١٠ + ٦٦ - ١٤٥$$

$$= ٣١$$

٤ ـ إيجاد القيمة المتوقعة والتباين لاختبار مان ـ وتني كما يلي:

$$ت(U) = \frac{ن_1 ن_2}{2} \qquad تبا(U) = \frac{ن_1 ن_2 (ن_1 + ن_2 + 1)}{12}$$

$$= \frac{10 \times 11}{2} = 55 \qquad = \frac{10 \times 11 (10 + 11 + 1)}{12}$$

$$= 201.66$$

$$\sigma_u = 14.2$$

٥ ـ إذا كانت $ن_1$ ، $ن_2$ > ٨ فإن U تتبع تقريباً التوزيع الطبيعي بالتوقع والتباين المبيّنين في الخطوة السابقة، أي أن المقدار:

$$ى = \frac{U - ت(U)}{\sigma_u} \qquad (٦٠ - ٢ - ٧)$$

له توزيع معتاد قياسي

وبالتعويض في (٦٠ ـ ٢ ـ ٧) نجد أن:

$$ى = \frac{31 - 55}{14.2} = \frac{-24}{14.2} = -1.69$$ حيث ٣١ هي قيمة $U_2$

٦ ـ من جدول التوزيع المعتاد القياسي رقم (٣) نجد أن

$$ى_{0.025} = -1.96$$

$$ى_{0.975} = 1.96$$

وحيث أن قيمة ى المحسوبة في الخطوة ٥ لا تقع بين هاتين القيمتين فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسط الأجور في الشركة الأولى لا يساوي متوسط الأجور في الشركة الثانية).

### (٥ ـ ٢ ـ ٧) اختبار H لكروسكال ـ والاس:

يعتبر اختبار كروسكال ـ والاس امتداداً لاختبار مان ـ وتني ويستخدم لاختبار ما إذا كانت مجموعة من العينات المستقلة تنتمي إلى مجتمعات متماثلة، ويشبهه من حيث التطبيق كما هو موضح في المثال التالي:

**مثال ١:**

لدراسة الفروق بين متوسطات الانفاق السنوي (بالدينار) على الملابس في ثلاث مدن اخترنا عينة عشوائية من الأسر في كل منها فحصلنا على البيانات التالية:

| الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة أ | الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة ب | الانفاق السنوي على الملابس لأسر العينة من المدينة جـ |
|---|---|---|
| ١٢٠ | ١٤٠ | ١٥٠ |
| ١٦٠ | ١٦٥ | ١٧٠ |
| ٢٦٠ | ٢٤٠ | ١٨٠ |
| ٣٦٠ | ٣٨٠ | ٢٥٠ |
| ٢١٠ | ٢٢٠ | ١٩٠ |
| | ٣٥٠ | ٢٣٠ |
| | | ١٧٥ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن متوسطات الانفاق السنوي على الملابس للأسرة الواحدة في المدن الثلاث متساوية وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

الحــل:

$H_0$ : متوسطات الانفاق السنوي على الملابس للأسرة الواحدة متساوية في المدن الثلاث.

$H_1$ : متوسطات الانفاق السنوي على الملابس للأسرة الواحدة غير متساوية في المدن الثلاث.

ولاختبار هذا الفرض تتبع الخطوات التالية:

١ ـ كما في حالة مان ـ وتني نقوم بترتيب المشاهدات في العينات الثلاث تصاعدياً ثم نعطيها رتباً كما في الجدول التالي:

| المدينة (أ) | | المدينة (ب) | | المدينة (ج) | |
|---|---|---|---|---|---|
| المشاهدة | الرتبة | المشاهدة | الرتبة | المشاهدة | الرتبة |
| ١٢٠ | ١ | ١٤٠ | ٢ | ١٥٠ | ٣ |
| ١٦٠ | ٤ | ١٦٥ | ٥ | ١٧٠ | ٦ |
| ٢٦٠ | ١٥ | ٢٤٠ | ١٣ | ١٨٠ | ٨ |
| ٣٦٠ | ١٧ | ٣٨٠ | ١٨ | ٢٥٠ | ١٤ |

| المدينة (أ) | | المدينة (ب) | | المدينة (ج) | |
|---|---|---|---|---|---|
| المشاهدة | الرتبة | المشاهدة | الرتبة | المشاهدة | الرتبة |
| ٢١٠ | ١٠ | ٢٢٠ | ١١ | ١٩٠ | ٩ |
| | | ٣٥٠ | ١٦ | ٢٣٠ | ١٢ |
| | | | | ١٧٥ | ٧ |
| المجموع | $م_1$ = ٤٧ | | $م_2$ = ٦٥ | | $م_3$ = ٥٩ |

٢ ـ تجميع رتب المشاهدات في كل من العينات الثلاث ولتكن هذه المجاميع $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ على التوالي ($م_1$ = ٤٧ ، $م_2$ = ٦٥ ، $م_3$ = ٥٩).

٣ ـ التعويض في صيغة اختيار كروسكال ـ والاس التالية:

$$= \frac{١٢}{ن\,(ن + ١)} \left( \frac{م_1^2}{ن_1} + \frac{م_2^2}{ن_2} + \frac{م_3^2}{ن_3} \right) - ٣\,(ن + ١) \qquad (٦١ - ٢ - ٧)$$

حيث $ن_1$ حجم العينة الأولى

$ن_2$ حجم العينة الثانية

$ن_3$ حجم العينة الثالثة

$ن = ن_1 + ن_2 + ن_3$

$$\therefore H = \frac{١٢}{١٨\,(١٨ + ١)} \left( \frac{٤٧^2}{٥} + \frac{٦٥^2}{٦} + \frac{٥٩^2}{٧} \right) - ٣\,(١٨ + ١)$$

$$\therefore H = ٠{,}٦٧$$

٤ ـ إذا كان $H_0$ صحيحاً، $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$ > ٥ فإن H تتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حرية ٣ ـ ١ حيث ٣ عدد العينات.

٥ ـ من جدول كاي تربيع (جدول رقم (٤)) نجد:

$\chi^2_{٢، ٠{,}٠٥} = ٥{,}٩٩١$

وحيث أن قيمة $\chi^2$ المحسوبة في الخطوة ٣ أقل من ٥,٩٩١ فإننا نقبل الفرض (أي أن متوسطات الانفاق السنوي على الملابس للأسرة الواحدة متساوية في المدن الثلاث).

## أسئلة وتمارين (٧)

(٧ ـ ١) اختيرت عينة عشوائية حجمها ٢٥ أسرة من بين الأسر التي تسكن في منطقة معينة، وقد تبين أن التوزيع التكراري للدخل الأسبوعي في العينة كما يلي:

| فئات الدخل الأسبوعي بالدينار | عدد الأسر |
|---|---|
| ٥٠ ـ ٦٠ | ٣ |
| ٦٠ ـ ٧٠ | ٥ |
| ٧٠ ـ ٨٠ | ١٢ |
| ٨٠ ـ ٩٠ | ٤ |
| ٩٠ ـ ١٠٠ | ١ |
| المجموع | ٢٥ |

فإذا علم أن الدخل الأسبوعي يتبع التوزيع الطبيعي بتوقع $\mu$ وتباين $\sigma^2$.

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن متوسط الدخل الأسبوعي في هذه المنطقة يساوي ٧٥ ديناراً.

(٧ ـ ٢) شركة لانتاج المسامير الفولاذية لديها آلات لانتاج مسامير متوسط طولها ١٠٠ ملليمتر. ولاختبار مدى مطابقة إنتاج هذه الآلات للمواصفات المطلوبة قام باحث باختيار عينة عشوائية حجمها ١٢٠ مسماراً، فإذا وجد أن متوسط طول المسمار في هذه العينة هو ١٠٢ ملليمتر وإذا علم من دراسات سابقة أن تباين أطوال المسامير من إنتاج هذه الآلات هو ٣ (ملليمتر)$^2$ اختبر صحة ادعاء الشركة بأن المسامير المنتجة مطابقة للمواصفات المطلوبة.

(٧ - ٣) تقتضي شروط تصدير البيض من إنتاج مزرعة ما أن يكـون وزن البيضة ٩٥ غراماً. فـإذا اختار بـاحث عينة حجمهـا ١٠٠ بيضة من الكميـات المعـدّة للتصديـر ووجد أن متـوسط وزن البيضة في هـذه العينة هـو ٩٢ غراماً، فماذا يمكن القول عن مطابقة هذه الشحنة لشروط التصـدير علماً بأن تباين وزن البيضة من إنتاج هذه المزرعة هو ٢٥ (غم)^٢؟

(٧ - ٤) لاختبار مدى التزام مخبز بمواصفات وزارة التموين اختار مفتش التمـوين عينة عشوائية من إنتاج هذا المخبز حجمها ١٢٠ رغيفاً ووجد أن متوسط الـوزن وتباينـه في هذه العينـة يساويـان ١٧٥ غرام، ٣٦ (غـرام)^٢ عـلى التـوالي، اختبـر بمستوى معنـوية ٥٪ صحـة ادعاء المخبـز بتقيـده التـام بتعليـمات الـوزارة التي تنص عـلى أن لا يقـل وزن الـرغيف عن ١٧٧ غرام.

(٧ - ٥) تمتلك شركة أحذية آلة لصب كعوب الأحذية النسائية البلاستيكية، فإذا كـانت الموصفـات تتطلب أن يكـون متوسط وزن الكعب ١٢٠ غـراماً، اختبـر بمستوى معنويـة ٥٪ مدى مـطابقة الكعـوب المنتجة للمـواصفات المـطلوبة إذا علم أن متـوسط وزن الكعب لعينة عشـوائيـة حجمهـا ٢٥ كعباً هو ١٢٥ غم والانحراف المعياري لـوزن الكعب في هذه العينـة هو ٥ غم

(٧ - ٦) لدراسة أثر إضافة مادة كيماوية معينة على الأسمنت لـزيادة قـدرة الطوب الاسمنتي على التحمل، تم اختيار عينة عشوائية حجمهـا ٣٦ طوبـة من تلك المصنـوعة من الاسمنت المعـالج بـالمادة الكيـماويـة. فـإذا وجـد أن متوسط قدرة السنتمتر المربع الواحد في هذه العينة على تحمل الضغط هو ٢٢ كيلوغرام والانحراف المعيـاري للقدرة عـلى التحمل هـو ١,٥ كيلو غـرام، اختبـر بمستوى معنـوية ٥٪ صحـة ادعاء الشركـة المنتجة لهـذه المادة الكيماوية بأنها تزيد من قدرة الطوب الاسمنتي على تحمل الضغط، إذا علم أن قوة التحمل قبل المعالجة هي ٢١,٥ كيلوغرام.

(٧ - ٧) لمعـرفة أثـر نوع معيّن من الأعلاف عـلى إنتاج الأبقـار من الحليب، تم اختيار عينة عشوائية من هذه الأبقار حجمها ١٠ وسجل إنتاجها اليومي

قبل وبعد اعطائها الاعلاف وكانت النتائج كما يلي:

| البقـرة | الانتاج اليومي من الحليب قبل اعطائها الأعلاف الجديدة | الانتاج اليومي من الحليب بعد إعطائها الأعلاف الجديدة |
|---|---|---|
| ١ | ١٨ | ١٨,٥ |
| ٢ | ٢٠ | ٢١ |
| ٣ | ١٩,٥ | ١٠ |
| ٤ | ٢١ | ٢٢ |
| ٥ | ١٧ | ١٨ |
| ٦ | ١٩ | ١٨,٥ |
| ٧ | ٢٢ | ٢٣ |
| ٨ | ١٨,٥ | ٢٠ |
| ٩ | ٢٢,٥ | ٢٣ |
| ١٠ | ٢١,٥ | ٢٢ |

اختبـر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القـائل بـأن الأعلاف الجـديدة تـزيد الانتاج اليومي من الحليب.

(٨ ـ ٧) إذا كـان عدد شهـادات الدراسـة الثانـوية العـامـة ومـا فـوق، في عينـة عشـوائية حجمهـا ١٢٠ شخصاً من بـين العاملين في شركة معينـة، هـو ٤٠، اختبـر بمستـوى معنويـة ١٪ الادعـاء الـذي ورد في تقـريـر دائـرة الأبحـاث والدراسـات في هـذه الشركـة والـذي يقـول بـأن نسبـة حملة شهـادات الدراسـة الثانـوية العـامة ومـا فوق لا تقـل عن ٣٦٪ في هذه الشركة.

(٩ ـ ٧) لدراسة نسبـة المدخنـات بين السكـان الإناث في مـدينة مـا اخترنـا عينة عشـوائية حجمهـا ٢٠٠ فإذا كـان عدد المـدخنات في هـذه العينـة ٥٠، اختبـر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القـائل بـأن نسبة المـدخنات في هـذه المدينة لا تزيد عن ٢٠٪.

(١٠ ـ ٧) بـينّ مـا إذا كنت تقبـل أو تـرفض الفـرض التـالي بنـاء عـلى المعلومـات المعطاة:

الفرض $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

أ - حجم العينة الأولى (مأخوذة من المجتمع الأول) = ٢٠٠ مفردة.

ب - حجم العينة الثانية (مأخوذة من المجتمع الثاني) = ٥٠٠ مفردة.

جـ - متوسط العينة الأولى = ٢٨ ديناراً.

د - متوسط العينة الثانية = ٢٩ دينار

هـ - تباين المجتمع الأول = تباين المجتمع الثاني = ٤ (دينار)$^{٢}$.

و - مستوى المعنوية = ٥٪.

(٧ - ١١) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٥ - ٦) وتحت نفس الفروض:

١ - اختبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن متوسط دخل الأسرة في الحي الثاني لا يقل عن متوسط دخل الأسرة في الحي الأول إذا علم أن تباين دخول الأسر في الحي الأول يساوي تباين دخول الأسر في الحي الثاني.

٢ - إذا علمت أن تباين دخول الأسر - في المدينة ككل - يساوي ٢٥٠ ديناراً مربعاً، اختبر الفرض القائل بأن متوسط دخل الأسر في هذه المدينة يساوي ٥٠ ديناراً.

٣ - أوجد احتمال الخطأ من النوع الثاني في الاختبار المشار إليه في ٢ في الحالتين التاليتين:

أ - إذا كان متوسط الدخل الشهري للأسرة في المدينة يساوي ٤٩ ديناراً.

ب - إذا كان متوسط الدخل الشهري للأسرة في المدينة يساوي ٥٣ ديناراً.

(٧ - ١٢) بائع تفاح بالجملة يدعي أن ما يورده من هذه الفاكهة لا يحتوي على أكثر من ٤٪ من الثمار التالفة. فإذا أخذت عينة حجمها ٦٠٠ تفاحة ووجد فيها ٣٦ ثمرة تالفة، اختبر صحة ادعاء البائع بمستوى معنوية ١٪.

(٧ - ١٣) إذا تقدم ٤٩٠ طالباً و ٤٥٠ طالبة لامتحان في مستوى اللغة العربية وحصلنا من علاماتهم على النتائج التالية:

متوسط علامات الطلاب ٥٤,٣ والانحراف المعياري لعلاماتهم ١٧,٥

متوسط علامات الطالبات ٥٠,٦ والانحراف المعياري لعلاماتهن ١٨.
فهل يوجد فرق (بمستوى معنوية ٥٪) بين علامات الطلاب وعلامات الطالبات، إذا علم أن تباين علامات الطلاب وتباين علامات الطالبات بشكل عام متساويان؟

(٧ ـ ١٤) مستورد يمكنه استيراد نوعين من اللمبات الكهربائية، وقبل أن يتخذ قراراً بالاستيراد قام باختبار ثلاث لمبات من كل نوع لمعرفة متوسط عمر اللمبه وحصل منها على النتائج التالية:

| عمر اللمبة (بالمائة ساعة) من النوع الأول | عمر اللمبة (بالمائة ساعة) من النوع الثاني |
|---|---|
| ٢٠ | ٢٥ |
| ١٩ | ٢٣ |
| ٢١ | ٢١ |

فهل يمكن الحكم (بمستوى معنوية ٠,٠٥) بأن متوسطي العمر متساويان للنوعين الأول والثاني؟

(٧ ـ ١٥) تريد مؤسسة الإذاعة والتلفزيون معرفة آراء المشاهدين في برنامج تلفزيوني معين واختارت لهذا الغرض عينة عشوائية من الراشدين حجمها ٤٠٠ شخصاً وأخرى من المراهقين حجمها ٦٠٠ شخصاً. فإذا أشار ١٠٠ راشد و ٣٠٠ مراهق إلى أنهم يحبون البرنامج المذكور، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن نسبة المراهقين الذين يحبون البرنامج أكبر من نسبة الراشدين.

(٧ ـ ١٦) وجد محل تجاري أن متوسط مبيعاته اليومية خلال ٢٥ يوماً من نوع معين من الأدوات الكهربائية هو ٣٢٠ وحدة والانحراف المعياري لحجم المبيعات هو ٤٠ وحدة. وبعد القيام بحملة إعلانية مكثفة وجدت الإدارة أن متوسط حجم المبيعات من هذه السلعة خلال ٢٥ يوماً هو ٣٥٠ وحدة والانحراف المعياري ٦٠ وحدة. اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن حجم المبيعات قبل الحملة الإعلامية أكبر من أو يساوي حجم المبيعات بعد الحملة الإعلانية (اعتبر أن تبايني حجم المبيعات اليومية قبل الحملة وبعدها متساويان)

(١٧ ـ ٧) شركة تملك مصنعين لإنتاج المصابيح الكهربائية، ولدراسة الفرق بين متوسط مدة خدمة مصباحٍ من إنتاج هذين المصنعين اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ مصباحاً من إنتاج المصنع الأول وعينة عشوائية ثانية حجمها ٨٠ مصباحاً من إنتاج المصنع الثاني، فإذا وجد أن متوسط مدة خدمة المصباح من العينة الأولى يساوي ١١٨٠ ساعة ومتوسط مدة خدمة المصباح من العينة الثانية يساوي ١٢٠٠ ساعة وإذا علم أيضاً من خبرة سابقة أن تباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول يساوي ٣٦٠٠ (ساعة)$^2$ وتباين مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثاني يساوي ٤٠٠٠ (ساعة)$^2$، اختبر بمستوى معنوي ١٠٪ صحة ادعاء إدارة المبيعات في هذه الشركة بأن متوسط مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الأول يساوي متوسط مدة خدمة المصباح من إنتاج المصنع الثاني، ثم اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن الفرق بين متوسط مدة خدمة المصباح من المصنع الأول ومتوسط مدة خدمة المصباح من المصنع الثاني أكبر من أو يساوي ١٥ ساعة ($\mu_1 - \mu_2 \geq$ ١٥).

(١٨ ـ ٧) لدراسة متوسط وزن الطفل عند الولادة حسب الجنس، اخترنا عينتين عشوائيتين الأولى من المواليد الذكور حجمها ١٦ مولوداً وجد منها أن متوسط الوزن $\overline{س}_1$ = ٢٩٠٠ غم وتباين الوزن $ع_1^2$ = ٢٥٠٠ (غرام)$^2$ والثانية من المواليد الإناث حجمها ١٢ مولوداً وجد منها أيضاً أن متوسط الوزن $\overline{س}_2$ = ٣٠٠٠ غرام وتباين الوزن $ع_2^2$ = ٣٦٠٠ (غرام)$^2$. فإذا علم أن تباين وزن الذكور عند الولادة يساوي تباين وزن الإناث عند الولادة، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ أن متوسط وزن الذكور عند الولادة أقل من وزن الإناث عند الولادة.

(١٩ ـ ٧) لمعرفة تأثير علاج معينّ على ضغط الدم المرتفع اخترنا عينة عشوائية حجمها ١٠ مرضى وسجلنا لهم ضغط الدم قبل وبعد تعاطي العلاج وكانت النتائج كما يلي:

| المريض | ضغط الدم قبل العلاج | ضغط الدم بعد العلاج |
|---|---|---|
| ١ | ١٧٠ | ١٦٠ |
| ٢ | ١٨٠ | ١٦٠ |
| ٣ | ١٦٠ | ١٥٥ |
| ٤ | ١٧٥ | ١٧٠ |
| ٥ | ١٥٠ | ١٤٠ |
| ٦ | ١٨٠ | ١٦٥ |
| ٧ | ١٨٥ | ١٧٠ |
| ٨ | ١٩٠ | ١٧٥ |
| ٩ | ١٩٥ | ١٨٠ |
| ١٠ | ٢٠٠ | ١٨٠ |

والمطلوب: اختبار ما إذا كان لهـذا العلاج أثـر في تخفيض ضغط الدم بمستـوى معنوية ١٪.

(٢٠ ـ ٧) قـررت إحدى الـوكالات شراء عـدد من شاشـات التلفـزيـون من نـوع معـين، واشترطت لإتمـام هذه الصفقـة أن لا يزيـد تبـاين مـدة خـدمـة الشـاشة من هـذا النوع عن ٤٠٠ (سـاعة)٢. فـإذا اختار بـاحث عينـة عشوائية حجمها ٣٠ شاشة ووجد أن تبـاين مدة الخـدمة في هـذه العينة يساوي ٥٠٠ (ساعة)٢، فهل تنصح الوكالة بإتمام عملية الشراء؟

(٢١ ـ ٧) الجدول التالي يبينّ مدة الخدمة (بالساعة) لنوع من لمبات التلفزيون

| مدة الخدمة (بالساعة) | التكـــرار |
|---|---|
| -١٢٠٠ | ٤ |
| -١٤٠٠ | ٨ |
| -١٦٠٠ | ١٨ |
| -١٨٠٠ | ٣٠ |
| -٢٠٠٠ | ٢٢ |
| -٢٢٠٠ | ١٢ |
| ٢٦٠٠-٢٤٠٠ | ٦ |
| المجمـــوع | ١٠٠ |

فإذا علم أن مدة الخدمة تتبع التوزيع المعتاد، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن تباين مدة الخدمة يساوي ٩٠٠٠٠ (ساعة)[٢].

(٢٢ ـ ٧) بالرجوع إلى التمرين (٢١ ـ ٧)، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن الإنحراف المعياري لمدة الخدمة يساوي ٣٠٠ ساعة.

(٢٣ ـ ٧) تدعى شركة لإنتاج الأسطوانات الفولاذية أن تباين نصف القطر للإسطوانات المنتجة لا يزيد عن ٠,٠٠٠٣ انش، فإذا اختير عينة عشوائية حجمها ١٠ اسطوانات من إنتاج هذه الشركة ووجد أن تباين نصف القطر لهذه العينة يساوي ٠,٠٠٠٤ انش، اختبر بمستوى معنوية ١٪ صحة ادعاء الشركة.

(٢٤ ـ ٧) يدعي قسم المبيعات في شركة لإنتاج مساحيق الغسيل أن تباين الوزن في العلب ذات الوزن ثلاثة كيلوغرامات لا يزيد عن ٠,٠٢ كيلوغرام. فإذا وجد أن تباين الوزن في عينة عشوائية حجمها ٨ علب يساوي ٠,٠٢٨ ، اختبر بمستوى معنوية ١٪ صحة إدعاء هذه الشركة.

(٢٥ ـ ٧) البيانات التالية تبيّن النفقات الشهرية على الإعلان (س) بالدينار وحجم المبيعات (ص) بالوحدة من سلعة ما خلال عشرة أشهر:

| النفقات الشهرية (س) | حجم المبيعات (ص) |
|---|---|
| ٤٠٠ | ٢٥٠٠ |
| ٥٠٠ | ٣٠٠٠ |
| ٦٥٠ | ٤٠٠٠ |
| ٥٠٠ | ٢٨٠٠ |
| ٤٥٠ | ٢٢٠٠ |
| ٤٨٠ | ٢٣٥٠ |
| ٦٤٠ | ٣٨٨٠ |
| ٦٠٠ | ٣١٠٠ |
| ٦٨٠ | ٤١٠٠ |
| ٧٢٠ | ٤٦٥٠ |

١ ـ وفّق علاقة خطية بسيطة بين النفقات (س) وحجم المبيعات (ص)

٢ ـ اختبر جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

٣ ـ قدّر حجم المبيعات عندما تكون النفقات الشهرية للإعلان ٧٥٠ ديناراً.

٤ ـ احسب كلاً من التفاوت الكلي والتفاوت المفسّر والتفاوت غير المفسّر.

٥ ـ قدّر تباين النموذج الخطي البسيط.

٦ ـ اختبر الفرض القائل بأن أ = صفر وذلك باستخدام توزيع ستيودنت (ت) وبمستوى معنوية ٥٪.

(٢٦ ـ ٧) إذا كان المتغيران س، ص يرتبطان بالعلاقة التالية

$$ص = أ_. + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + خ$$

وإذا كان لدينا البيانات التالية:

| س | ص |
|---|---|
| ١ | ٦ |
| ٢ | ٣ |
| ٣ | ٢ |
| ٤ | ٣ |
| ٥ | ٥ |

١ ـ قدّر المعالم $أ_.$ ، $أ_١$ ، $أ_٢$ بطريقة المربعات الصغرى

٢ ـ كوّن فترة ثقة ٩٥٪ لكل من $أ_١$ ، $أ_٢$

٣ ـ كوّن فترة ثقة مشتركة ٩٥٪ للثابتين $أ_١$ ، $أ_٢$

٤ ـ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن $أ_٢$ = صفر

٥ ـ كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٠٪.

(٢٧ ـ ٧) إذا اخترنا عشوائياً ٦ أسر من تلك التي تقطن في منطقة ما وحصلنا منها على المعلومات التالية:

١ ـ وفّق النموذج الخطي البسيط ص = أس + ب + خ

٢ ـ اختبر بمستوى ٥٪ جودة ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين الدخل السنوي (س) والنفقات السنوية على الإنتقال والعلاج.

٣ ـ قدّر كلاً من أ، ب بفترة ثقة ٩٥٪.

٤ ـ قدّر الثابتين أ، ب بفترة ثقة مشتركة ٩٠٪.

٥ ـ اختبر بمستوى معنوية ١٠٪ الفرض القائل بأن أ = صفر

| الاسرة | الدخل السنوي بمئات الدنانير (س) | النفقات السنوية على الانتقال والعلاج (ص) |
|---|---|---|
| ١ | ٧ | ٣ |
| ٢ | ١١ | ٤ |
| ٣ | ١٠ | ٥ |
| ٤ | ١٢ | ٣ |
| ٥ | ١٨ | ٧ |
| ٦ | ٢٠ | ٨ |

(٢٨ ـ ٧) في دراسة لمعرفة العلاقة بين درجة ميل الأطفال (ص) لنوع معين من العصير حسب محتوياته ($س_١$) ودرجة حلاوته ($س_٢$) حصلنا على المعلومات التالية:

| الطفل | ص | $س_١$ | $س_٢$ |
|---|---|---|---|
| ١ | ٦٥ | ٣ | ٤ |
| ٢ | ٨٠ | ٣ | ٨ |
| ٣ | ٧٠ | ٥ | ٤ |
| ٤ | ٩٠ | ٥ | ٨ |
| ٥ | ٨٥ | ٧ | ٤ |
| ٦ | ٩٥ | ٧ | ٨ |

فإذا افترضنا أن العلاقة بين ص والمتغيرين $س_١$ ، $س_٢$ هي النموذج الخطي العام

$ص = أ_. + أ_١ س_١ + أ_٢ س_٢ + خ$:

١ ـ أوجد تقديرات لمعالم النموذج بطريقة المربعات الصغرى

٢ ـ اختبر الفرض القائل بأن $أ_١$ = صفر ($\alpha = ٠,٠٥$)

٣ ـ اختبر الفرض القائل بأن $أ_٢$ = صفر ($\alpha = ٠,٠١$)

٤ ـ كوّن جدولاً لتحليل التباين

(٢٩ ـ ٧) بالرجوع إلى تمرين (٢٢ ـ ٦):
اختبر الفرض أ = صفر بمستوى معنوية ٥٪.
اختبر الفرض أ ≥ صفر بمستوى معنوية ٥٪.

(٣٠ ـ ٧) بالرجوع إلى تمرين (٢٣ ـ ٦):
١ ـ اختبر الفرض $أ_١$ = صفر بمستوى معنوية ١٪
٢ ـ اختبر الفرض $أ_٢$ = صفر بمستوى معنوية ١٪

(٣١ ـ ٧) البيانات التالية تمثل ١٠ صناديق من المواد الغذائية المعلبة الواردة إلى بقالة معينة مصنفة حسب عدد العلب في كل صندوق ($س_١$) ووزن الصندوق ($س_٢$) ودقائق العمل اللازمة لإدخالها إلى المخزن (ص)

| الصندوق | عدد العلب في الصندوق ($س_١$) | وزن الصندوق ($س_٢$) بالكيلوغرام | دقائق العمل (ص) |
|---|---|---|---|
| ١ | ٧٠ | ٥٠ | ٢٥ |
| ٢ | ١٥٠ | ١١٠ | ٧٥ |
| ٣ | ٤٠ | ٣٠ | ١٥ |
| ٤ | ١٢٠ | ٩٠ | ٦٠ |
| ٥ | ١١٠ | ٨٥ | ٥٠ |
| ٦ | ٣٠ | ٢٥ | ١٥ |
| ٧ | ٢٢٠ | ٢٠٠ | ١٣٠ |
| ٨ | ٦٠ | ٣٥ | ٢٠ |
| ٩ | ١٤٠ | ١٠٥ | ٧٠ |
| ١٠ | ٤٠ | ٣٢ | ١٨ |

١ ـ وفق النموذج الخطي ص = $أ_.$ + $أ_١س_١$ + $أ_٢س_٢$ + خ للبيانات المعطاة.
٢ ـ اختبر كلاً من الفروض التالية بمستوى معنوية ٥٪. $أ_١$ = صفر
$أ_٢$ = صفر
٣ ـ اختبر بمستوى معنوية ٥٪ جودة مطابقة النموذج المحدد في ١.

(٣٢ ـ ٧) بالرجوع إلى تمرين (١٨ ـ ٦)، اختبر بمستوى معنوية ١٪ جودة مطابقة النموذج الخطي البسيط للبيانات المعطاة.

(٧ - ٣٣) بالرجوع إلى تمرين (٢٣ - ٦)، اختبر بمستوى معنوية ٥٪ جودة مطابقة النموذج الخطي العام للبيانات المعطاة.

(٧ - ٣٤) بالرجوع إلى تمرين (٩ - ٤) وفّق توزيع بواسون لعدد الآلات التي توقفت عن العمل في اليوم ثم اختبر جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

(٧ - ٣٥) بالرجوع إلى تمرين (١٦ - ٤) اختبر بمستوى معنوية ١٪ جودة مطابقة توزيع بواسون لعدد الحوادث الأسبوعية التي وقعت لعينة من عمال صناعة البناء.

(٧ - ٣٦) الجدول التالي يبين توزيع عدد الأطفال الذكور في ١٠٠ أسرة كل منها مكوّن من أب وأم وخمسة أطفال:

| عدد الأطفال الذكور | عدد الأسر |
|---|---|
| ٠ | ٧ |
| ١ | ١٣ |
| ٢ | ٣٠ |
| ٣ | ٢٥ |
| ٤ | ١٥ |
| ٥ | ١٠ |

والمطلوب توفيق توزيع ذي الحدين لهذه البيانات واختبار جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

(٧ - ٣٧) الجدول التكرار التالي يبين توزيع الأجور الأسبوعية لـ ١٠٠٠ شخص من العاملين في إحدى المؤسسات الصناعية.

| فئات الأجر الأسبوعي بالدينار | عدد العاملين |
|---|---|
| ٢٠ - ٣٠ | ٥٠ |
| ٣٠ - ٤٠ | ١٥٠ |
| ٤٠ - ٥٠ | ٢٠٠ |
| ٥٠ - ٦٠ | ٢٥٠ |
| ٦٠ - ٧٠ | ١٧٠ |
| ٧٠ - ٨٠ | ١٣٠ |
| ٨٠ - ٩٠ | ٤٠ |
| ٩٠ - ١٠٠ | ١٠ |
| المجموع | ١٠٠ |

والمطلوب توفيق التوزيع الطبيعي لهذه البيانات واختبار جودة المطابقة بمستوى معنوية ٥٪.

(٧ - ٣٨) إذا كان معامل الإرتباط المحسوب من عينة حجمها ٢٥ من أزواج متناظرة (س،ص) هو ٠,٤٠، اختبر الفرض القائل بأن معامل الإرتباط بين مجتمعي س،ص يساوي صفراً.

(٧ - ٣٩) بالرجوع إلى تمرين (٦ - ٤١)، اختبر الفرض القائل بأن معامل الإرتباط بين طول الطالب ووزنه في الجامعة الأردنية يساوي ٠,٧٥ .

(٧ - ٤٠) بالرجوع إلى تمرين (٦ - ٤٣)، اختبر الفرض القائل بأن معامل ارتباط بيرسون بين الرقم القياسي لأسعار التجزئة والرقم القياسي لأسعار الجملة لأسعار مجموعة السلع خلال السنوات ١٩٧٥ - ١٩٨٤ لا يزيد عن ٠,٨٥ .

(٧ - ٤١) الجدول المزدوج التالي يبين توزيع ٤٠ شخصاً حسب أعمارهم وعمر الإبن الأكبر لكل منهم:

| عمر الاب (س) / عمر الابن (ص) | ٢٥ - ٣٥ | ٣٥ - ٤٥ | ٤٥ - ٥٥ | ٥٥ - ٦٥ |
|---|---|---|---|---|
| ١٠ - ١٢ | ٢ | ١ | ١ | |
| ١٢ - ١٤ | ١ | ٧ | ٥ | ١ |
| ١٤ - ١٦ | | ١٠ | ٥ | ٢ |
| ١٦ - ١٨ | | | ٣ | ٢ |

احسب معامل ارتباط بيرسرن بين عمر الأب (س) وعمر الابن الأكبر (ص)، واختبر بمستوى معنوية ٥٪ أن معامل الارتباط بين أعمار الآباء وأعمار أكبر الأبناء لا يقل عن ٠,٤٠ .

(٧ - ٤٢) فندق معينّ لديه غرف بالأسعار (عال، متوسط، منخفض) وصاحب الفندق يعلن عن خدمة ممتازة في جميع الغرف، فإذا أخذت عينة عشوائية من ضيوف هذا الفندق وكانت آراؤهم في مستوى الخدمة، حسب أسعار الغرف، كما هو مبين في الجدول التالي:

١ - اوجد المنوال لمستوى الخدمة

٢ - احسب معامل التوافق بين مستوى الخدمة وسعر الغرفة

٣ - اختبر الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين سعر الغرفة ومستوى الخدمة.

| سعر الغرفة / مستوى الخدمة | عال | متوسط | منخفض | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| ممتاز | ١٥ | ٢٥ | ١٠ | ٥٠ |
| جيد | ٢٠ | ٦٥ | ١٥ | ١٠٠ |
| رديء | ٥ | ٢٠ | ٥ | ٣٠ |
| المجموع | ٤٠ | ١١٠ | ٣٠ | ١٨٠ |

(٤٣ - ٧) إذا كان لدينا الجدول المزدوج التالي:

| س / ص | $س_1$ | $س_2$ | المجموع |
|---|---|---|---|
| $ص_1$ | ٣٠ | ١٠ | ٤٠ |
| $ص_2$ | ٢٠ | ٤٠ | ٦٠ |
| المجموع | ٥٠ | ٥٠ | ١٠٠ |

اختبر الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغيرين س،ص

(٤٤ - ٧) إذا كان لدينا الجدول المزدوج التالي:

| س / ص | $س_1$ | $س_2$ | $س_3$ | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $ص_1$ | ٩ | ٥٤ | ٥٧ | ١٢٠ |
| $ص_2$ | ١١ | ٢٦ | ٤٣ | ٨٠ |
| المجموع | ٢٠ | ٨٠ | ١٠٠ | ٢٠٠ |

احسب قيمة $\chi^2$ واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل باستقلال المتغيرين س،ص

(٤٥ - ٧) في دراسة عن عادات التدخين في مدينة كبيرة أخذت عينة عشوائية بسيطة مكوّنة من ١٠٠ مدخن وسجلت البيانات المتعلقة بالدخل الشهري للمدخن وصنف السجائر الذي يدخنه في الجدول المزدوج التالي:

صنف السجائر

| فئات الدخل الشهري بالدينار | أ | ب | جـ | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| أقل من ٥٠ | ٧ | ٢ | ٦ | ١٥ |
| ٥٠ - ١٠٠ | ١٠ | ٢٨ | ٢٧ | ٦٥ |
| ١٠٠ فأكثر | ٨ | ١٠ | ٢ | ٢٠ |
| المجموع | ٢٥ | ٤٠ | ٣٥ | ١٠٠ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل باستقلال صنف السجائر الذي يستهلكه المدخن عن مستوى دخله وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

(٧ - ٤٦) منتج سينمائي يريد أن يقوم بحملة دعائية لفيلمه الجديد، وقبل المباشرة بهذه الحملة اختار عينة عشوائية من مختلف الأعمار ودعاهم إلى عرض خاص لكي يعرف ما إذا كان هذا الفيلم يجتذب فئات معينة من العمر أم لا، وبعد سؤال هؤلاء عن أعمارهم ورأيهم في الفيلم المذكور حصل المنتج على البيانات المبوبة في جدول التوافق التالي:

| الرأي | أقل من ٢٠ | ٢٠ - ٣٩ | ٤٠ - ٥٩ | ٦٠ فأكثر |
|---|---|---|---|---|
| احبوا الفيلم | ١٤٦ | ٧٨ | ٤٨ | ٣٨ |
| لم يحبو الفيلم | ٥٤ | ٥٢ | ٤٢ | ٢٢ |
| محايدون | ٢٠ | ٢٠ | ٩ | ٨ |

فما هو اقتراحك بالنسبة لتنظيم هذه الحملة الدعائية؟

(٧ - ٤٧) الجدول التالي يبيّن توزيع ٣٠٠ مستخدم في إحدى المؤسسات الحكومية حسب مستوى التعليم والصحيفة اليومية التي اعتاد على قراءتها:

| الصحيفة<br>مستوى التعليم | أ | ب | جـ |
|---|---|---|---|
| ابتدائي | ٣١ | ١١ | ١٢ |
| اعدادي | ٤٩ | ٥٩ | ٥١ |
| ثانوي | ١٨ | ٢٦ | ٣١ |
| جامعي | ٢ | ٤ | ٦ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين الصحيفة ومستوى التعليم بمستوى معنوية ١٪.

(٤٨ ـ ٧) لدراسة العلاقة بين مستوى تعليم الأب ومستوى تعليم الأم اخترنا عينة عشوائية حجمها ١٠ أبناء ورتبناهم حسب مستوى تعليم الأب ومستوى تعليم الأم فحصلنا على النتائج التالية:

| رقم الابن | مستوى تعليم الأب | مستوى تعليم الأم |
|---|---|---|
| ١ | ٢ | ٣ |
| ٢ | ٤ | ٢ |
| ٣ | ٦ | ٤ |
| ٤ | ٣ | ١ |
| ٥ | ٥ | ٧ |
| ٦ | ١ | ٥ |
| ٧ | ٧ | ١٠ |
| ٨ | ٩ | ٨ |
| ٩ | ١٠ | ٩ |
| ١٠ | ٨ | ٧ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد ارتباط بين مستوى تعليم الأب ومستوى تعليم الأم (اعتبر $\alpha$ = ١٠,٠).

(٤٩ ـ ٧) اختار باحث اجتماعي عينة عشوائية حجمها ٨ من طالبات أحد المعاهد المتوسطة وقام بترتيبهن حسب ملابسهن ومستوى ذكائهن فحصل على النتائج التالية:

| رقم الطالبة | مستوى الملابس | مستوى الذكاء |
|---|---|---|
| ١ | ٣ | ٢ |
| ٢ | ٤ | ١ |
| ٣ | ٦ | ٣ |
| ٤ | ٥ | ٤ |

| رقم الطالبة | مستوى الملابس | مستوى الذكاء |
|---|---|---|
| ٥ | ٧ | ٥ |
| ٦ | ١ | ٧ |
| ٧ | ٢ | ٨ |
| ٨ | ٨ | ٦ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بوجود علاقة طردية بين مستوى الملابس ومستوى الذكاء.

(٥٠ ـ ٧) لدراسة العلاقة بين مدة الخدمة ومستوى الأداء في إحدى الشركات اختيرت عينة عشوائية حجمها ١٢ شخصاً من موظفي هذه الشركة ورتبوا حسب عدد سنوات الخدمة ومستوى الأداء لكل منهم، فكانت النتائج كما يلي:

| رقم الموظف | الترتيب حسب عدد سنوات الخدمة | الترتيب حسب مستوى الأداء |
|---|---|---|
| ١ | ٤ | ٥ |
| ٢ | ٣ | ٢ |
| ٣ | ٧ | ٦ |
| ٤ | ٨ | ٤ |
| ٥ | ١٠ | ٧ |
| ٦ | ١١ | ١٠ |
| ٧ | ٢ | ١ |
| ٨ | ١ | ٣ |
| ٩ | ٥ | ٨ |
| ١٠ | ٦ | ١٢ |
| ١١ | ٩ | ١١ |
| ١٢ | ١٢ | ١١ |

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بوجود علاقة عكسية بين الترتيب حسب عدد سنوات الخدمة والترتيب حسب مستوى الأداء.

(٧ - ٥١) للتعرف على التوزيع الإحتمالي لسعر البندورة خلال فصل الصيف، راقب باحث الأسعار في سوق الخضار المركزي خلال ١٢ يوماً فكانت الأسعار في هذه الأيام للكيلوغرام كما يلي بالفلسات:

٦٠، ٤٥، ٦٨، ٥٤، ٥٦، ٦٧، ٧٠، ٦٥، ٥٠، ٦١، ٥٥، ٧٥

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن السعر الوسيط هو ٦٠ فلس للكيلوغرام الواحد.

(٧ - ٥٢) إذا كانت الأرقام التالية تمثل عينة حجمها ١٠ مختارة عشوائياً من مجتمع معين

٢، ٤، ١٠، ٨، ٧، ٢، ١٤، ٢٠، ٢٤، ١٦

فإن المطلوب هو اختبار الفرض القائل بأن الوسيط لهذا المجتمع لا يزيد عن ١٠

(٧ - ٥٣) إذا كان الاستهلاك الشهري من الكهرباء (بالكيلوواط) لعينة عشوائية حجمها ٢٠ أسرة كما يلي بالكيلوواط:

٢٠ ٢٤ ٤٠ ٤٢ ٥٠ ٦٠ ٦٤ ٨٢ ٧٤ ٥٥ ٤٥

٦٥ ٢٥ ٣٥ ٣٨ ٤٦ ٣٨ ٥٦ ٦٤ ٨٥

استخدم اختبار الإشارة لاختبار ما إذا كان وسيط الاستهلاك الشهري يساوي ٦٠ كيلوواط

(٧ - ٥٤) إذا كانت أجرة المسكن الشهرية (بالدينار) لعينة عشوائية حجمها ١٤ أسرة هي كما يلي:

٥٠ ٤٤ ٤٨ ٧٠ ٨٢ ١٠٠ ٦٥

٦٨ ٧٦ ٦٥ ٧٥ ٥٤ ٩٢ ٩٥

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن أجرة السكن الوسيطة هي ٧٢ دينار في الشهر

(٧ - ٥٥) لدراسة الفرق بين متوسطي الإنفاق الشهري (بالدينار) على المساكن في مدينتين، اخترنا عينة عشوائية من أسر المدينة الأولى حجمها $ن_١ = ٩$

وعينة عشوائية من أسر المدينة الثانية حجمها $ن_٢$ = ٨ فكانت أجور المسكن الشهرية التي تدفعها هذه الأسر كما يلي:

$ن_١$ : ٥٠ ، ٦٢ ، ٨٠ ، ١٠٠ ، ٣٠ ، ٣٥ ، ٢٨ ، ٤١

$ن_٢$ : ٥٠ ، ٧٠ ، ٦٨ ، ٨٢ ، ٧٦ ، ١٥٠ ، ١٤٠ ، ١٢٠ ، ٨٣

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن وسيطي الإنفاق الشهري على المسكن في المدينتين متساويان بمستوى معنوية ١٪.

(٧ - ٥٦) إذا كانت العينتان العشوائيتان التاليتان من مجتمعين متصلين ومتشابهين (ما عدا اختلاف محتمل في قيمتي الوسيطين)

الاولى : ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ٧ ، ٦ ، ٣

الثانية : ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٥ ، ٤ ، ٤ ، ١٠ ، ٦

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن وسيط المجتمع الأول أقل من وسيط المجتمع الثاني.

(٧ - ٥٧) شركة تملك مصنعين لانتاج البطاريات الجافة، اختيرت عينة عشوائية من المصنع الأول حجمها $ن_١$ = ١٢ وعينة عشوائية من المصنع الثاني حجمها $ن_٢$ = ١٣ فكانت مدة خدمة البطارية (بالساعة) في كل من بطاريات هاتين العينتين كما يلي:

الاولى: ١٢٠ ، ١٣٠ ، ١٥٥ ، ١٥٠ ، ١٤٢ ، ١٣٦ ، ١٥٨ ، ١٦٠ ، ١٢٩ ، ١٤٧ ، ١٥٥ ، ١٥٣

الثانية : ١٢٢ ، ١٤٢ ، ١٤٧ ، ١٥٦ ، ١٦١ ، ١٦٢ ، ١٦٦ ، ١٥٤ ، ١٣٩ ، ١٤١ ، ١٣١ ، ١٦٥

اختبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض القائل بأن وسيط مدة خدمة البطارية من انتاج المصنع الأول أصغر من وسيط مدة خدمة البطارية من انتاج المصنع الثاني.

(٧ - ٥٨) لاختبار أثر معالجة كيماوية معينة على قوة تحمل نوع معين من القماش، أخذنا عينة عشوائية حجمها عشر قطع من القماش وقمنا بقياس تحملها للشد قبل وبعد المعالجة الكيماوية فحصلنا على النتائج التالية:

| رقم القطعة | قوة الشد بالكيلوغرام قبل المعالجة | قوة الشد بالكيلوغرام بعد المعالجة |
|---|---|---|
| ١ | ٣٠ | ٣٢ |
| ٢ | ٢٢ | ٢٧ |
| ٣ | ١٧ | ١٨ |
| ٤ | ١٦ | ١٦ |
| ٥ | ٢١ | ٢٠ |
| ٦ | ١٩ | ١٨ |
| ٧ | ٢٥ | ٢٣ |
| ٨ | ٣٢ | ٣٤ |
| ٩ | ٢٤ | ٢٥ |
| ١٠ | ٢٧ | ٢٦ |

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأن المعالجة الكيماوية غير فعّالة في زيادة قوة الشد (استخدم اختبار الإشارة لمجتمعين).

(٥٩ ـ ٧) لاختبار الفرق بين متوسط وزن الطفل (بالكيلوغرام) عند الولادة حسب الجنس اخترنا عينة عشوائية من الأطفال الذكور حجمها ١٢ طفلاً وعينة من الأطفال الإناث حجمها ١٤ طفلة فحصلنا على البيانات التالية.

| الأطفال الذكور | الأطفال الإناث |
|---|---|
| ٢,٩٠٠ | ٢,٨٥٠ |
| ٢,٩٥٠ | ٢,٩٠٠ |
| ٣,١٠٠ | ٢,٧٥٠ |
| ٣,٢٠٠ | ٢,٦٥٠ |
| ٣,٠٠٠ | ٢,٥٠٠ |
| ٢,٨٠٠ | ٣,٠٠٠ |
| ٢,٧٥٠ | ٣,٢٠٠ |
| ٢,٥٥٠ | ٢,٤٥٠ |
| ٢,٨٧٠ | ٢,٠٠٠ |

| الأطفال الذكور | الأطفال الإناث |
|---|---|
| ٢,٧٦٠ | ٢,١٠٠ |
| ٢,٥٩٠ | ٢,٠٥٠ |
| ٢,٦٢٠ | ٣,١٠٠ |
| | ٣,٠٥٠ |
| | ٢,٣٠٠ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد فرق بين وزن الأطفال الذكور والأطفال الإناث عند الولادة باستخدام اختبار مان ـ وتني بمستوى معنوية ٥٪.

(٦٠ ـ ٧) لدراسة متوسط عمر المرأة عند الزواج الأول في ثلاث مدن اخترنا عشوائياً ثلاث عينات من النساء فحصلنا على البيانات التالية (بالسنوات)

| المدينة أ | المدينة ب | المدينة جـ |
|---|---|---|
| ٢٧ | ٢٢ | ٢٣ |
| ١٨ | ٢١ | ٢٥ |
| ١٦ | ١٨ | ٢٢ |
| ١٥ | ١٦ | ١٦ |
| ١٩ | ١٥ | ١٧ |
| | ٢٨ | ١٤ |
| | | ١٨ |

والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن عمر المرأة عند الزواج في المدن الثلاث متماثل بمستوى معنوية ٥٪.

# الباب الثامن

# الفصل الأول

## تحليل التباين Analysis of Variance

### (٨ - ١ - ١) مقدمة Introduction

نفترض في تحليل التباين أن لدينا عدة مجتمعات وإن متوسطاتها متساوية. أي أن

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = .... = \mu_{ك}$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq .... \neq \mu_{ك}$ (٨ - ١ - ١)

حيث ك عدد المجتمعات (ك ≥ ٣).

وعلى سبيل المثال أفرض أن لدينا ثلاث آلات تنتج قطعاً لغيار السيارات ونريد اختبار الفرض القائل بأن كلاً من الآلات الثلاث سوف تنتج في المتوسط نفس العدد من القطع في اليوم الواحد. أي أن

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$h_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ولاختبار هذه الفرضيات فإننا نراقب انتاج كل آلة في عدد عشوائي من الأيام التي تنتج فيها ونقارن قيمة الدالة الإختبارية المحسوبة من هذه البيانات بقيمة جدولية مستخرجة من جدول توزيع المعاينة للدالة الإختبارية، فإذا كانت القيمة المحسوبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفرض.

ولكي يتمكن الباحث من اختبار هذا الفرض فإنه يجب أن يكون قادراً على افتراض أن:

١ - كل مجتمع من المجتمعات له توزيع طبيعي بتوقع $\mu_ر$ وتباين $\sigma^2_ر$ (ر = ١ ، ٢ ، ... ، ك)

٢ - تباينات هذه المجتمعات متساوية، أي أن $\sigma^2_1 = \sigma^2_2 = ....... = \sigma^2_{ك}$

٣ ـ المشاهدات في كل عينة مستقلة ومختارة بشكل عشوائي.

وتحليل التباين له تطبيقات واسعة في مختلف المجالات الزراعية والصناعية والتجارية.... الخ. وهو في مجمله يعتمد على تجزئة التباين الكلي (والذي يمثل مجموع مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي مقسوماً على عدد درجات الحرية) إلى مجموعات يرجع كل منها إلى عامل من العوامل المختلفة التي تؤثر على نتيجة التجربة.

### (٢ ـ ١ ـ ٨) تحليل التباين في اتجاه واحد

تقوم فكرة تحليل التباين في اتجاه واحد على مقارنة بيانات عدة عينات أو مجموعات مختارة من مجتمعات مختلفة. فإذا فرضنا أن عدد العينات أو المجموعات يساوي ك وعدد المشاهدات في كل عينة أو مجموعة نر (ر = ١، ٢، ..... ، ك) فإننا نعبّر عن هذه المشاهدات على النحو التالي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| المجموعة (١) : | $\text{س}_{١١}$ | $\text{س}_{٢١}$ . . . | $\text{س}_{١\,ن_١}$ |
| المجموعة (٢) : | $\text{س}_{١٢}$ | $\text{س}_{٢٢}$ . . . | $\text{س}_{٢\,ن_٢}$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| المجموعة (ك) : | $\text{س}_{ك١}$ | $\text{س}_{ك٢}$ . . . | $\text{س}_{ك\,ن_ك}$ |

$$\text{التفاوت الكلي} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_\text{و}} (\text{س}_{\text{ور}} - \bar{\text{س}}_{..})^2 \qquad (٢ - ١ - ٨)$$

$$\text{حيث } \bar{\text{س}}_{..} = \frac{\text{س}_{..}}{\text{ن}} = \frac{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_\text{و}} \text{س}_{\text{ور}}}{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \text{ن}_\text{و}}$$

ويمكن تجزئة التفاوت الكلي في المعادلة (٢ ـ ١ ـ ٨) إلى تفاوت بين المجموعات Between Group Variation وتفاوت داخل المجموعات Within Group Variation على النحو التالي:

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_\text{و}} (\text{س}_{\text{ور}} - \bar{\text{س}}_{..})^2 = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \text{ن}_\text{و} (\bar{\text{س}}_{\text{و}.} - \bar{\text{س}}_{..})^2$$

$$+ \sum_{\text{و}=1}^{\text{ك}} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}_\text{و}} (\text{س}_{\text{ور}} - \bar{\text{س}}_{\text{و}.})^2 \qquad (٣ - ١ - ٨)$$

ويمثل التفاوت داخل المجموعات (الحد الثاني من الطرف الأيسر للمعادلة (٣ ـ ١ ـ ٨)) الخطأ Error أو الباقي Residual والفرض الذي نريد اختباره في هذه الحالة هو من الصورة (١ ـ ١ ـ ٨).

لقد افترضنا أن تباينات المجتمعات متساوية وتساوي كل منها قيمة واحدة $\sigma^{2}$ سواء كان الفرض صحيحاً أم خاطئاً. ونناقش من خلال المثال التالي، طريقتين مختلفتين لتقدير هذا التباين. ونستخدم هذين التقديرين في إجراء الاختبار:

الجدول التالي يبين الانتاج اليومي (بالوحدة) خلال أسبوع لثلاث عمال في مصنع معيّن:

| العامل الأول | العامل الثاني | العامل الثالث |
|---|---|---|
| ٢٠ | ٢٨ | ٣٦ |
| ١٢ | ١٦ | ٣٢ |
| ٦ | ٢٤ | ٣٨ |
| ١٦ | ١٨ | ٣٠ |
| ١٠ | ٢٠ | ٤٦ |
| ٨ | ١٤ | ٢٢ |

والمطلوب تقدير تباين عدد الوحدات المنتجة بطريقتي داخل المجموعات Within-Group Method وبين المجموعات Between-Group Method واختبار الفرض القائل بتساوي متوسط الإنتاج للعمال الثلاث.

الحل

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

حيث $\mu_1$ متوسط الانتاجية للعامل الأول

$\mu_2$ متوسط الإنتاجية للعامل الثاني

$\mu_3$ متوسط الإنتاجية للعامل الثالث

$$\overline{س}_{١.} = \frac{٢٠ + ١٢ + \cdots + ٨}{٦} = ١٢$$

$\overline{س}_{٢.} = \frac{٢٨ + ١٦ + ٠٠٠ + ١٤}{٦} = ٢٠$

$\overline{س}_{٣.} = \frac{٣٦ + ٣٢ + ٠٠٠ + ٢٢}{٦} = ٣٤$

$\overline{س}_{..} = \frac{١٢ + ٢٠ + ٣٤}{٣} = ٢٢$

باستخدام الحد الثاني من الطرف الأيسر للمعادلة (٢ ـ ٢ ـ ٨) فإن

مجموع المربعات أو التفاوت داخل المجموعات= $\sum_{و=١}^{ك} \sum_{ر=١}^{ن_و} (س_{ور} - \overline{س}_{و.})^٢$

= (٢٠ − ١٢)^٢ + (١٢ − ١٢)^٢ + (١٢ − ٦)^٢ + (١٦ − ١٢)^٢ + (١٠ − ١٢)^٢ +
(٨ − ١٢)^٢ + (٢٠ − ٢٨)^٢ + (٢٠ − ١٦)^٢ + (٢٤ − ٢٠)^٢ + (١٨ − ٢٠)^٢ +
(٢٠ − ٢٠)^٢ + (١٤ − ٢٠)^٢ + (٣٦ − ٣٤)^٢ + (٣٢ − ٣٤)^٢ + (٣٨ − ٣٤)^٢ +
(٣٠ − ٣٤)^٢ + (٣٤ − ٤٦)^٢ + (٢٢ − ٣٤)^٢

= ٦٠٠

درجات الحرية (٧) = عدد المشاهدات − عدد الثوابت التي تمّ تقديرها من المشاهدات

= ن − ك

= ١٨ − ٣ = ١٥

تقدير ($\sigma^٢$) = $\frac{٦٠٠}{١٥}$ = ٤٠

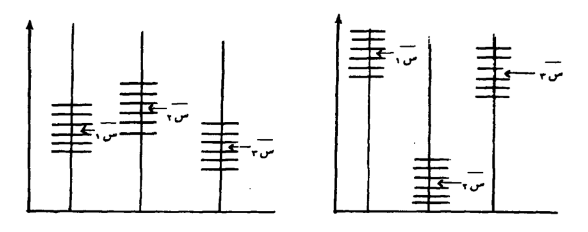
ويلاحظ أن كل مشاهدة تقارن بالوسط الحسابي للمجموعة التي تنتمي لها هذه المشاهدة. ونثبت فيما يلي أن متوسط مجموع المربعات داخل المجموعات مقدّر غير متحيز للتباين $\sigma^٢$:

$ت\left( \sum_{و=١}^{ك} \sum_{ر=١}^{ن_و} (س_{ور} - \overline{س}_{و.})^٢ \right) = \sum_{و=١}^{ك} \sum_{ر=١}^{ن_و} ت\,(س_{ور} - \overline{س}_{و.})^٢$

$= \sum_{و=١}^{ك} (ن_و - ١)\,\sigma^٢$

$= (ن - ك)\,\sigma^٢$

ومن الجدير بالذكر أن قيمة التباين المقدّر بطريقة داخل المجموعات لا تختلف سواء كان الفرض صحيحاً أم غير صحيح كما هو مبين بالرسم البياني التالي:




شكل (١ ـ ١ ـ ٨ ب)

شكل (١ ـ ١ ـ ٨ أ)

يستنتج من الشكل (١ ـ ١ ـ ٨ أ) أن الفرض صحيح ومن الشكل (١ ـ ١ ـ ٨ ب) إن الفرض غير صحيح ومع ذلك فإن التفاوت داخل المجموعات لا يختلف في الحالة الأولى عنه في الحالة الثانية لأننا نحسب إنحرافات المشاهدات في مجموعة معينة عن الوسط الحسابي لنفس المجموعة.

وباستخدام الحد الأول من الطرف الأيسر للمعادلة (٢ ـ ٢ ـ ٨) فإن:

التفاوت بين المجموعات $= ٦ \left( (١٢-٢٢)^{٢} + (٢٠-٢٢)^{٢} + (٣٤-٢٢)^{٢} \right)$

$= ١٤٨٨$

$\therefore$ تقدير $(\sigma^{٢}) = \dfrac{١٤٨٨}{٣-١}$

$= ٧٤٤$

وإذا كان الفرض صحيحاً فإن طريقة بين المجموعات تعطي مقدّراً غير متحيز للتباين أما إذا كان الفرض غير صحيح فإنها تعطي مقدراً متحيزاً، وبالتالي فإنه يمكن استخدام توزيع فيشر (ف) لاختبار الفرض القائل بتساوي المتوسطات بقسمة تقدير التباين بطريقة بين المجموعات على تقدير التباين بطريقة داخل المجموعات، فإذا

كانت هذه النسبة أقل من القيمة الجدولية فإننا نقبل الفرض. ونوضح ذلك فيما يلي بالاعتماد على نتائج المثال السابق:

ف (المحسوبة) = $\frac{٧٤٤}{٤٠}$ = ١٧,٦

درجات حرية البسط $ح_١$ = ٣ - ١ = ٢

درجة حرية المقام $ح_٢$ = ١٨ - ٣ = ١٥

وإذا اخترنا $\alpha$ = ٠,٠١ فإن ف (الجدولية) من جدول رقم (٦) هي

$ف_{٢، ١٥، ٠,٠١}$ = ٦,٤

وبما أن ف (المحسوبة) > ف (الجدولية) فإننا نرفض الفرض (أي أن متوسطات الإنتاجية للعمال الثلاثة غير متساوية).

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في جدول تحليل التباين
Analysis of Variance Table (A NOVA)

على النحو التالي:

| مصدر الاختلاف أو التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| بين المجموعات | ١٤٨٨ | ٢ | ٧٤٤ | ١٨,٦ |
| داخل المجموعات | ٦٠٠ | ١٥ | ٤٠ | |
| الكلي | ٢٠٨٨ | ١٧ | | |

(٣ - ١ - ٨) تحليل التباين في اتجاهين:
**Two-way Analysis of Variance:**

نفترض في هذه الحالة وجود متغيرين يؤثران على المتغير التابع (عدد الوحدات المنتجة في اليوم أو مستوى إنتاجية القمح مثلاً). فإذا قام باحث بزراعة أربعة أنواع مختلفة من القمح أ، ب، جـ، د واستخدم في تسميد التربة ثلاثة أنواع مختلفة من المخصّبات الكيماوية Fertilizers ١، ٢، ٣ فإنه ربما يرغب أو يجد نفسه في هذه الحالة بحاجة إلى اختبار الفرضين التاليين:

$H_0^{(1)}$ : $\mu_أ = \mu_ب = \mu_ج = \mu_د$

$H_0^{(2)}$ : $\mu_١ = \mu_٢ = \mu_٣$ (٤ - ١ - ٨)

وإذا كـان لدى البـاحث أكثر من نتيجة واحـدة Replicates لنفس النـوع من القمـح ونفس النوع من السـماد فإنـه ربما يـرغب أيضاً في اختبـار فـرض ثـالث يتعلق بالتفاعل المزدوج Interaction بين المتغيرين السابقين (نوع القمح ونـوع السماد). وفي هذه الحالة فإنه يمكن صياغة الفروض الثلاثة على النحو التالي:

$H_0$ (١) : $\mu_{أ} = \mu_{ب} = \mu_{ج} = \mu_{د}$

$H_0$ (٢) : $\mu_{1} = \mu_{2} = \mu_{3}$ (٥ - ١ - ٨)

$H_0$ (٣) : لا يوجد تفاعل مزدوج No.Interaction

**مثـال ١ :**

الجدول التالي يبين إنتاجية الدونم الواحد لاربعة أنواع مختلفة من القمح وثـلاثة أنواع مختلفة من الأسمدة. والمطلـوب:

١ - اختبـار الفرض القـائل بعـدم وجود فـرق في الإنتاجيـة بين الأنـواع المختلفة من القمح بمستوى معنوية ٥٪.

٢ - اختبـار الفرض القـائل بعـدم وجود فـرق في الإنتاجيـة بين الأنـواع المختلفة من الأسمدة بمستوى معنوية ١٪.

| أنواع القمح / أنواع الأسمدة | النوع أ | النوع ب | النوع جـ | النوع د |
|---|---|---|---|---|
| النوع ١ | ٤ | ٧ | ٦ | ٧ |
| النوع ٢ | ٩ | ١٠ | ١١ | ٦ |
| النوع ٣ | ٥ | ٧ | ٧ | ٥ |

**الحـل:**

يجزأ في هذه الحالة ، التفاوت أو الاختلاف الكلي إلى ثلاثة أجزاء : التفاوت بين الصفوف (أنواع الأسمدة) ، التفاوت بين الأعمدة (أنواع القمح) ، الباقي أو الخطأ .

| أنواع القمح / أنواع الأسمدة | أ | ب | جـ | د | المجموع | المتوسط |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٤ | ٧ | ٦ | ٧ | ٢٤ | ٦ |
| ٢ | ٩ | ١٠ | ١١ | ٦ | ٣٦ | ٩ |
| ٣ | ٥ | ٧ | ٧ | ٥ | ٢٤ | ٦ |
| المجموع | ١٨ | ٢٤ | ٢٤ | ١٨ | | |
| المتوسط | ٦ | ٨ | ٨ | ٦ | | |

المجموع الكلي = ٤ + ٧ + ٦ + ٧ + ٩ + ١٠ + ١١ + ٦ + ٥ + ٧ + ٧
+ ٥ = ٨٤

المتوسط العام = $\frac{٨٤}{٣ \times ٤} = ٧$

التفاوت الكلي = (٤ − ٧)$^{٢}$ + (٧ − ٧)$^{٢}$ + (٦ − ٧)$^{٢}$ (٧ − ٧)$^{٢}$ + (٩
− ٧)$^{٢}$ + (١٠ − ٧)$^{٢}$ + (١١ − ٧)$^{٢}$ + (٦ − ٧)$^{٢}$ + (٥
− ٧)$^{٢}$ + (٧ − ٧)$^{٢}$ + (٧ − ٧)$^{٢}$ + (٥ − ٧)$^{٢}$
= ٩ + صفر + ١ + صفر + ٤ + ٩ + ١٦ + ١ + ٤ +
صفر + صفر + ٤
= ٤٨

التفاوت بين الصفوف (بين أنواع الأسمدة)

= ٤ ((٦ − ٧)$^{٢}$ + (٩ − ٧)$^{٢}$ + (٦ − ٧)$^{٢}$)
= ٤ (١ + ٤ + ١)
= ٢٤

التفاوت بين الأعمدة (بين أنواع القمح)

= ٣ ((٦ − ٧)$^{٢}$ + (٨ − ٧)$^{٢}$ + (٨ − ٧)$^{٢}$ + (٦ − ٧)$^{٢}$)
= ٣ (١ + ١ + ١ + ١)
= ١٢

الباقي أو الخطأ = ٤٨ − ٢٤ − ١٢ = ١٢

تلخص النتائج السابقة في جدول تحليل التباين كما يلي:

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| بين الصفوف | ٢٤ | ٢ | ١٢ | ٦ |
| بين الأعمدة | ١٢ | ٣ | ٤ | ٢ |
| الباقي | ١٢ | ٦ | ٢ | |
| الكلي | ٤٨ | ١١ | | |

لاختبار الفرض $H_o$ (١) فإن $ف_{٢،٦،٠٫٠٥}$ = ٥,١٤

وحيث أن ف (المحسوبة) > ف (الجدولية) فإننا نرفض الفرض $H_o$ (١) (أي أنه يوجد فرق بين أنواع السماد المختلفة من حيث أثرها على متوسط الانتاجية).

أما لاختبار الفرض $H_o$ (٢) فإن $ف_{٣،٦،٠٫٠١}$ = ٩,٧٨

وحيث أن ف (المحسوبة) < ف (الجدولية) فإننا نقبل الفرض $H_o$ (٢) (أي أنه لا يوجد فرق بين متوسط إنتاج الدونم لأنواع القمح المختلفة).

**مثـال ٢ :**

أراد مزارع أن يحدد أثر ثلاثة أنواع من الأسمدة على ثلاثة أنواع مختلفة من البندورة فقام بتصميم تجربة اختار فيها عشوائياً قطعتي أرض متساويتين من حيث المساحة، زرع فيهما نوعاً من البندورة وأضاف إليهما نوعاً من السماد. فإذا جمع الانتاج في نهاية الموسم وكانت النتائج (بالألف كيلوغرام) كما هو مبيّن في الجدول التالي، كون جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفروض التالية:

متوسطات الانتاجية للأنواع المختلفة من البندورة متساوية

متوسطات الانتاجية للأنواع المختلفة من الأسمدة متساوية

لا يوجد تفاعل مزدوج بين نوع البندورة ونوع السماد.

| نوع السماد / نوع البندورة | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|
| أ | ٩ | ٦ | ٧ |
| | ٨ | ٥ | ٤ |
| ب | ٥ | ٨ | ٦ |
| | ٦ | ٦ | ٨ |
| جـ | ٧ | ٩ | ٦ |
| | ١٠ | ٨ | ٨ |

**الحل:**

الفروض التي نريد اختبارها هي:

$H_o$ (١) : $\mu_{أ} = \mu_{ب} = \mu_{ج}$

$H_o$ (٢) : $\mu_{١} = \mu_{٢} = \mu_{٣}$

$H_o$ (٣) : لا يوجد تفاعل مزدوج

$$\bar{س}_{أ} = \frac{٩ + ٨ + ٦ + ٥ + ٧ + ٤}{٦} = \frac{٣٩}{٦} = ٦,٥$$

$$\bar{س}_{ب} = \frac{٥ + ٦ + ٨ + ٦ + ٦ + ٨}{٦} = \frac{٣٩}{٦} = ٦,٥$$

$$\bar{س}_{ج} = \frac{٧ + ١٠ + ٩ + ٨ + ٦ + ٨}{٦} = \frac{٤٨}{٦} = ٨,٠$$

$$\bar{س}_{١} = \frac{٩ + ٨ + ٥ + ٦ + ٧ + ١٠}{٦} = \frac{٤٥}{٦} = ٧,٥$$

$$\bar{س}_{٢} = \frac{٦ + ٥ + ٨ + ٦ + ٩ + ٨}{٦} = \frac{٤٢}{٦} = ٧,٠$$

$$\bar{س}_{٣} = \frac{٧ + ٤ + ٦ + ٨ + ٦ + ٨}{٦} = \frac{٣٩}{٦} = ٦,٥$$

س̄ (المتوسط العام) = (٦,٥ + ٦,٥ + ٨) / ٣ = ٢١ / ٣ = ٧,٠

س̄ ا١ = (٩ + ٨) / ٢ = ٨,٥

س̄ ا٢ = (٦ + ٥) / ٢ = ٥,٥

س̄ ا٣ = (٧ + ٤) / ٢ = ٥,٥

س̄ ب١ = (٥ + ٦) / ٢ = ٥,٥

س̄ ب٢ = (٨ + ٦) / ٢ = ٧,٠

س̄ ب٣ = (٦ + ٨) / ٢ = ٧,٠

س̄ جـ١ = (٧ + ١٠) / ٢ = ٨,٥

س̄ جـ٢ = (٩ + ٨) / ٢ = ٨,٥

س̄ جـ٣ = (٦ + ٨) / ٢ = ٧,٠

التفاوت بين الصفوف (أنواع البنـدورة = ٣ × ٢ ((٦,٥ - ٧)^٢ + (٦,٥ - ٧)^٢ +
(٨ - ٧)^٢)

= ١ × ١,٥

= ٩

التفـاوت بـين الأعمـدة (أنـواع السـماد) = ٣ × ٢ ((٧,٥ - ٧)^٢ + (٧ - ٧)^٢ +
(٦,٥ - ٧)^٢)

= ١ × ٠,٥

= ٣

التفاوت الذي يعزى للتفاعل المزدوج =

٢ ((٨,٥ - ٦,٥ + ٧,٥ + ٧)٢ + (٥,٥ - ٦,٥ - ٧ + ٧)٢ + (٥,٥ - ٦,٥ - ٦,٥ + ٧)٢ + (٥,٥ - ٦,٥ - ٧,٥ + ٧)٢ + (٧ - ٦,٥ - ٧ + ٧)٢ + (٧ - ٦,٥ + ٧)٢ + (٦,٥ - ٦,٥ + ٧)٢ + (٨,٥ - ٨ - ٧,٥ + ٧)٢ + (٨,٥ - ٨ - ٧ + ٧)٢ + (٧ - ٨ - ٦,٥ + ٧)٢)

= ٢ (٢,٢٥ + ١ + ٠,٢٥ + ٢,٢٥ + ٠,٢٥ + ١ + صفر + ٠,٢٥ + ٠,٢٥)

= ١٥

التفـاوت الكلي = (٩ - ٧)٢ + (٨ - ٧)٢ + (٦ - ٧)٢ + (٥ - ٧)٢ + (٧ - ٧)٢ + (٤ - ٧)٢ + (٥ - ٧)٢ + (٨ - ٧)٢ + (٨ - ٧)٢ + (٦ - ٧)٢ + (٦ - ٧)٢ + (٦ - ٧)٢ + (٨ - ٧)٢

= ٤ + ١ + ١ + ٤ + صفر + ٩

+ ٤ + ١ + ١ + ١ + ١

+ صفر + ٩ + ٤ + ١ + ١ + ١

= ٤٤

الخطأ أو الباقي = ٤٤ - ٩ - ٣ - ١٥

= ١٧

وفيما يلي نكون جدولاً لتحليل التباين:

| مصدر التفاوت أو الاختلاف | مجموع المربعات | درجات الحرية | متـوسط مجمـوع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| بين الصفوف | ٩ | ٢ | ٤,٥ | ٢,٣٨ |
| بين الأعمدة | ٣ | ٢ | ١,٥ | ٠,٧٩ |
| التفاعل المزدوج | ١٥ | ٤ | ٣,٧٥ | ١,٩٨ |
| البـاقي | ١٧ | ٩ | ١,٨٩ | |
| المجـموع | ٤٤ | ١٧ | | |

ف$_{٢، ٩، ٠,٠٥}$ = ٤,٣

وحيث أن ٢,٣٨ < ٤,٣ فإننا نقبل $H_0$ [١]

ف٢، ٩، ٠,٠٥ = ٣,٤ فإننا نقبل $H_0$ (٢)

ف٤، ٩، ٠,٠٥ = ٣,٦

وحيث أن ١,٩٨ < ٣,٦ فإننا نقبل $H_0$ (٣)

## (٤ - ١ - ٨) تحليل التباين في ثلاثة اتجاهات

### مربع لاتيني Latin Square

إذا استخدمنا المربع اللايتني فإننا نستطيع إزالة آثار عاملين من العوامل المؤثرة على نتيجة التجربة، فإذا أردنا مثلا دراسة الفروق بين أنواع مختلفة من البذور فإن الاختلافات في حجم الإنتاج لا تحدث فقط من إختلافات أنواع البذور وإنما تنشأ أيضاً من إختلافات الأحواض واختلافات مواقع القطع داخل الأحواض، فإنه يجب تمثيل كل بذرة في كل حوض وفي كل قطعة من القطع المختلفة داخل الحوض. والتصميم المناسب في هذه الحالة هو المربع اللاتيني حيث يمكن التحكم بخصوبة التربة باختيار أحواض متعددة والتحكم باختلافات مواقع القطع في الأحواض باستزراع كل بذرة في كل موقع.

وإذا فرضنا مثلاً أن لدينا أربعة أنواع من البذور وأربعة أحواض وأربع قطع فإن تصميم المربع اللاتيني يأخذ الشكل التالي:

الأحواض (مستويات الحرث)

| | | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | أ | ب | جـ | د |
| القطع | II | ب | جـ | د | أ |
| (مستويات الخصوبة) | III | جـ | د | أ | ب |
| | IV | د | أ | ب | جـ |

ويجزأ التباين أو التفاوت الكلي في المربع اللاتيني إلى أربعة أجزاء مختلفة: التفاوت بين المعالجات (أ، ب، جـ، د)، التفاوت بين الصفوف (I, II, III, IV)، التفاوت بين الأعمدة (١، ٢، ٣، ٤)، الخطأ أو الباقي.

أما الفروض التي ربما نريد إختبارها فهي

$H_0$ (١): $\mu_{أ} = \mu_{ب} = \mu_{جـ} = \mu_{د}$

$H_0^{(2)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$H_0^{(3)}: \mu_{I} = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$ (٦ ـ ١ ـ ٨)

**مثال:**

أجريت تجربة للمقارنة بين أربعة أنواع من آلات تعبئة الأدوية في عبوات خاصة واستخدم كذلك أربعة عمال في أربعة أيام متتالية. وكانت النتائج (بالالف عبوة) كما هو مبين في المربع اللاتيني التالي:

العمال

| | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|
| I | أ (٤٠) | ب (٦٢) | حـ (٣٨) | د (٥٠) |
| الأيام II | ب (٥٦) | جـ (٣٥) | د (٥٤) | أ (٥٢) |
| III | جـ (٣٠) | د (٦٤) | أ (٥١) | ب (٥٩) |
| IV | د (٧٠) | أ (٤٧) | ب (٦٥) | جـ (٤٣) |

حيث أ، ب، جـ، د ترمز للآلات الأربع.

والمطلوب تكون جدول لتحليل التباين واختبار الفرضيات التالية وهي أيضاً المحددة في (٦ ـ ١ ـ ٨):

$H_0^{(1)}: \mu_{أ} = \mu_{ب} = \mu_{جـ} = \mu_{د}$ (أي أن متوسطات أعداد العبوات الزجاجية المنتجة بالالات أ، ب، ج، د متساوية)

$H_0^{(2)}: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (أي أن متوسطات أعداد العبوات الزجاجية التي ينتجها العمال ١، ٢، ٣، ٤ متساوية)

$H_0^{(3)}: \mu_{I} = \mu_{II} = \mu_{III} = \mu_{IV}$ (أي أن متوسطات أعداد العبوات الزجاجية المنتجة في الأيام الأربعة متساوية)

الحل

العمال (الأعمدة)

| | | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | المجموع | المتوسط |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | أ (٤٠) | ب (٦٢) | جـ (٣٨) | د (٥٠) | ١٩٠ | ٤٧,٥٠ |
| الأيام | II | ب (٥٦) | جـ (٣٥) | د (٥٤) | أ (٥٢) | ١٩٧ | ٤٩,٢٥ |
| (الصفوف) | III | جـ (٣٠) | د (٦٤) | أ (٥١) | ب (٥٩) | ٢٠٤ | ٥١,٠٠ |
| | IV | د (٧٠) | أ (٤٧) | ب (٦٥) | جـ (٤٣) | ٢٢٥ | ٥٦,٢٥ |
| المجموع | | ١٩٦ | ٢٠٨ | ٢٠٨ | ٢٠٤ | ٨١٦ | |
| المتوسط | | ٤٩ | ٥٢ | ٥٢ | ٥١ | | |

مجموع قيم أ = ٤٠ + ٥٢ + ٥١ + ٤٧ = ١٩٠

$\bar{س}_{أ} = \frac{١٩٠}{٤} = ٤٧,٥$

مجموع قيم ب = ٦٢ + ٥٦ + ٥٩ + ٦٥ = ٢٤٢

$\bar{س}_{ب} = \frac{٢٤٢}{٤} = ٦٠,٥$

مجموع قيم جـ = ٣٨ + ٣٥ + ٣٠ + ٤٣ = ١٤٦

$\bar{س}_{جـ} = \frac{١٤٦}{٤} = ٣٦,٥$

مجموع قيم د = ٥٠ + ٥٤ + ٦٤ + ٧٠ = ٢٣٨

$\bar{س}_{د} = \frac{٢٣٨}{٤} = ٥٩,٥$

المتوسط العام $\bar{س} = \frac{٨١٦}{١٦} = ٥١$

الإختلاف الكلي = $(٤٠ - ٥١)^٢ + (٦٢ - ٥١)^٢ + (٣٨ - ٥١)^٢$
$+ (٥٠ - ٥١)^٢ + (٥٦ - ٥١)^٢ + (٣٥ - ٥١)^٢$
$+ (٥٤ - ٥١)^٢ + (٥٢ - ٥١)^٢ + (٣٠ - ٥١)^٢$

+ (٦٤ - ٥١)$^{٢}$ + (٥١ - ٥١)$^{٢}$ + (٥٩ - ٥١)$^{٢}$

+ (٧٠ - ٥١)$^{٢}$ + (٤٧ - ٥١)$^{٢}$ + (٦٥ - ٥١)$^{٢}$

+ (٤٣ - ٥١)$^{٢}$

= ١٢١ + ١٢١ + ١٦٩ + ١ + ٢٥ + ٢٥٦ + ٩ + ١

+ ٤٤١ + ١٦٩ + صفر + ٦٣ + ٣٦١ + ١٦ + ١٩٦

+ ٦٤

= ٢٠١٤

التفاوت بين الآلات = ٤( (٤٧,٥ - ٥١)$^{٢}$ + (٦٠,٥ - )$^{٢}$+ (٣٦,٥ - ٥١)$^{٢}$

+ (٥٩,٥ - ٥١)$^{٢}$)

= ٤(١٢,٢٥ + ٩٠,٢٥ + ٢١٠,٢٥ + ٧٢,٢٥)

= ١٥٤٠

التفاوت بين الصفوف = ٤((٤٧,٥- ٥١)$^{٢}$ + (٤٩,٢٥ - ٥١)$^{٢}$ + (٥١ - ٥١)$^{٢}$

+ (٥٦,٢٥ - ٥١)$^{٢}$)

= ٤(١٢,٢٥ + ٣,٠٦٢٥ + صفر + ٢٧,٥٦٢٥)

= ١٧١,٥

التفاوت بين الأعمدة = ٤ ( (٤٩ - ٥١)$^{٢}$ + (٥٢ - ٥١)$^{٢}$ + (٥٢ - ٥١)$^{٢}$ +

(٥١-٥١)$^{٢}$)

= ٤(٤ + ١ + ١ + صفر)

= ٢٤

الباقي = ٢٠١٤ - ١٥٤٠ - ١٧١,٥ - ٢٤

= ٢٧٨,٥

وجدول تحليل التباين هو كما يلي:

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| بين المعالجات (الآلات) | ١٥٤٠ | ٣ | ٥١٣,٣٣ | ١١,٠٥٨ |
| بين الصفوف (الأيام) | ١٧١,٥ | ٣ | ٥٧,١٧ | ١,٢٣٢ |
| بين الأعمدة (العمال) | ٢٤ | ٣ | ٨ | ٠,١٧٢ |
| الباقي | ٢٧٨,٥ | ٦ | ٤٦,٤١ | |
| الكلي | ٢٠١٤ | ١٥ | | |

وإذا فرضنا أن مستوى المعنوية $\alpha$ = ٠,٠١ فإنه من جدول توزيع ف (٦ب)

ف$_{٣،٦،٠,٠١}$ = ٩,٨

وبالتالي فإننا نرفض $H_0^{(1)}$ ونقبل كلا من $H_0^{(2)}$ ، $H_0^{(3)}$

# الفصل الثاني

## تحليل التباين في الإنحدار

## Regression Analysis of Variance

### (١ - ٢ - ٨) مقدمة Introduction

ندرس في هذا الفصل العلاقة بين المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة باستخدام أسلوب تحليل التباين وذلك بتجزئة مجموع المربعات إلى جزئين أحدهما يعزى للانحدار والآخر يعزى للعوامل العشوائية، كما نستخدم هذا الأسلوب في إختبار مدى ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

### (٢ - ٢ - ٨) تحليل التباين في النموذج الخطي البسيط

**أولاً: إختبار وجود العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل**

إذا اعتبرنا النموذج (٢٤ - ٢ - ٦) فإنه يمكن تجزئة التفاوت الكلي إلى تفاوت مفسّر يعزى للإنحدار وتفاوت غير مفسّر يعزى للعوامل العشوائية كما هو مبين في المعادلة (٤٥ - ٢ - ٦) ونستعرض فيما يلي الأساس النظري لإستخدام أسلوب تحليل التباين في إختبار وجود العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل (أي $H_0$: أ = صفر)

$$\text{ت} \left( \sum_{ر=١}^{ن} (\text{ص}_ر - \hat{\text{ص}}_ر)^٢ \right) = (\text{ن} - ٢)\sigma^٢$$

وبالقسمة على درجات الحرية (ن - ٢) فإن

$$\frac{١}{\text{ن} - ٢} \text{ ت} \left( \sum_{ر=١}^{ن} (\text{ص}_ر - \hat{\text{ص}}_ر)^٢ \right) = \sigma^٢ \qquad (٧ - ٢ - ٨)$$

وهذا يعني، كما أسلفنا سابقاً، أن متوسط مجموع مربعات الأخطاء (MSE)

مقدّر غير متحيز للتباين $\sigma^2$

أما القيمة المتوقعة لمجموع المربعات الذي يعزى للإنحدار فإنه يمكن إيجادها على النحو التالي:

من المعلوم أن

$$\text{مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار} = \sum_{ر=1}^{ن} (\hat{ص}_ر - \overline{ص})^2$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (\hat{أ}\ س_ر + \hat{ب} - \hat{أ}\ \overline{س} - \hat{ب})^2$$

$$= \hat{أ}^2 \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2 \qquad (٨ - ٢ - ٨)$$

ومن (٨ ـ ٢ ـ ٨) فإن

$$ت\ (\text{مجموع المربعات الذي يعزى للإنحدار}) = ت\ (\hat{أ}^2 \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2)$$

$$= \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2\ ت(\hat{أ}^2)$$

$$(٨ - ٢ - ٩)$$

وبما أن

$$\sigma^2_{\hat{أ}} = ت\ (\hat{أ}^2) - (ت\ (\hat{أ}))^2 = ت\ (\hat{أ}^2) - أ^2$$

فإن

$$ت\ (\hat{أ}^2) = \sigma^2_{\hat{أ}} + أ^2 \qquad (٨ - ٢ - ١٠)$$

وبالتعويض من (٣٥ ـ ٢ ـ ٦) في (١٠ ـ ٢ ـ ٨) فإن

$$ت\ (\hat{أ}^2) = \frac{\sigma^2}{\sum (س_ر - \overline{س})^2} + أ^2 \qquad (٨ - ٢ - ١١)$$

وبالتعويض أيضاً من (١١ ـ ٢ ـ ٨) في (٩ ـ ٢ ـ ٨) نجد أن:

ت (مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار) =

$$\sigma^2 + أ^2 \sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2 ، \qquad (٨ - ٢ - ١٢)$$

وهي نفس القيمة المتوقعة لمتوسط مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار لأننا نحصل على المتوسطات بالقسمة على عدد درجات الحرية وهو واحد في النموذج الخطي البسيط.

وبمقارنة متوسط مجموع المربعات الذي يعزى للانحدار بمتوسط مجموع المربعات الذي يعزى للعوامل العشوائية فإنهما لا يتساويان إلا إذا كانت أ = صفر (أي في حالة عدم وجود علاقة بين س، ص).

وجدول تحليل التباين هو على الشكل التالي:

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| (١) التفاوت الذي يعزى للانحدار | $\sum_{ر=1}^{ن} (\hat{ص}_ر - \bar{ص})^٢$ | ٢ - ١ | $\frac{\sum (\hat{ص}_ر - \bar{ص})^٢}{١}$ | |
| (٢) التفاوت الذي يعزى للعوامل العشوائية | $\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢$ | ن - ٢ | $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \hat{ص}_ر)^٢}{ن - ٢}$ | |
| (٣) الكلي | $\sum_{ر=1}^{ن} (ص_ر - \bar{ص})^٢ = \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^٢ - ن\,\bar{ص}^٢$ | ن - ١ | | |

**مثـال:**

إذا كانت البيانات التالية تمثل عدد السكان (بالألف) والمبيعات (بـالوحـدة) من منتج معيّن في ١٠ مدن، أوجـد معادلة الانحدار الخـطية للمبيعـات (ص) على حجم السكان (س) ثم كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين س، ص.

| عدد الكسان بالألف (س) | المبيعات بالوحدة (ص) |
|---|---|
| ٣٦ | ٥٤ |
| ٢٦ | ٣٠ |
| ١٢ | ٢٨ |
| ٤٠ | ٤٨ |

| عدد السكان بالألف (س) | المبيعات بالوحدة (ص) |
|---|---|
| ٢٤ | ٣٦ |
| ١٨ | ٣٠ |
| ٣٠ | ٣٨ |
| ٣٠ | ٤٦ |
| ١٤ | ١٦ |
| ٣٤ | ٤٢ |

الحـــل:

سـوف نجري الحسـابات التـالية لتـوفيق الخط المستقيم (٢٤ ـ ٢ ـ ٦) بطريقـة المربعات الصغرى.

| عدد السكان بالألف (س) | المبيعات بالوحدة (ص) | $س^٢$ | س ص |
|---|---|---|---|
| ٣٦ | ٥٤ | ١٢٩٦ | ١٩٤٤ |
| ٢٦ | ٣٠ | ٦٧٦ | ٧٨٠ |
| ١٢ | ٢٨ | ١٤٤ | ٣٣٦ |
| ٤٠ | ٤٨ | ١٦٠٠ | ١٩٢٠ |
| ٢٤ | ٣٦ | ٥٧٦ | ٨٦٤ |
| ١٨ | ٣٠ | ٣٢٤ | ٥٤٠ |
| ٣٠ | ٣٨ | ٩٠٠ | ١١٤٠ |
| ٣٠ | ٤٦ | ٩٠٠ | ١٣٨٠ |
| ١٤ | ١٦ | ١٩٦ | ٢٢٤ |
| ٣٤ | ٤٢ | ١١٥٦ | ١٤٢٨ |
| المجموع ٢٤٦ | ٣٦٨ | ٧٧٦٨ | ١٠٥٥٦ |

وبالتعويض في (٢٩ ـ ٢ ـ ٦) ، (٣٠ ـ ٢ ـ ٦) نجد أن:

$\hat{أ}$ = ١,٠٥٣١٠٦ = ١,٠٥

$\hat{ب}$ = ٨,٩٩٨٠٠٢ = ٩

أي أن:

$\hat{ص} = ١,٠٥ س + ٩$

أما الحسابات التالية فإنها لازمة لتكوين جدول تحليل التباين:

| ص | $\hat{ص}$ | $(ص - \hat{ص})^٢$ | $(\hat{ص} - \bar{ص})^٢$ |
|---|---|---|---|
| ٥٤ | ٤٦,٨ | ٥١,٨٤ | ١٠٠,٠٠ |
| ٣٠ | ٣٦,٣ | ٣٩,٦٩ | ٠٠٠,٢٥ |
| ٢٨ | ٢١,٦ | ٤٠,٩٦ | ٢٣١,٠٤ |
| ٤٨ | ٥١,٠ | ٩,٠٠ | ٢٠١,٦٤ |
| ٣٦ | ٣٤,٢ | ٣,٢٤ | ٠٠٦,٧٦ |
| ٣٠ | ٢٧,٩ | ٤,٤١ | ٠٧٩,٢١ |
| ٣٨ | ٤٠,٥ | ٦,٢٥ | ٠١٣,٦٩ |
| ٤٦ | ٤٠,٥ | ٣٠,٢٥ | ٠١٣,٦٩ |
| ١٦ | ٢٣,٧ | ٥٩,٢٩ | ٠١٣,٦٩ |
| ٤٢ | ٤٤,٧ | ٥٩,٢٩ | ١٧١,٦١ |
| | | ٧,٢٩ | ٠٦٢,٤١ |
| المجموع ٣٦٨ | | ٢٥٢,٢٢ | ٨٨٠,٣٠ |

$$\bar{ص} = \frac{٣٦٨}{١٠} = ٣٦,٨$$

التفاوت الكلي = ٢٥٢,٢٢ + ٨٨٠,٣٠

= ١١٣٢,٥٢

الفرض الذي نريد اختباره $H_o$ : أ = صفر (أي أنه لا يوجد علاقة خطية مستقيمة وبسيطة بين عدد السكان وحجم المبيعات).

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| الانحدار | ٨٨٠,٣٠ | ١ | ٨٨٠,٣٠ | ٢٧,٩٢ |
| الباقي | ٢٥٢,٢٢ | ٨ | ٣١,٥٣ | |
| المجموع | ١١٣٢,٥٢ | ٩ | | |

فإذا أردنا مثلاً اختبار الفرض بمستوى معنوية ٥٪ فإننا نجد من جدول توزيع فيشر أن $ف_{١، ٨، ٠,٠٥}$ = ٥,٣

وحيث أن ٢٧,٩٢ > ٥,٣ فإننا نرفض الفرض (أي أنه يوجد علاقة خطية مستقيمة من الدرجة الأولى بين عدد السكان وحجم المبيعات).

ثانياً: اختبار مدى ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين س، ص:
يستخدم هذا الاختبار لتقرير ما إذا كانت العلاقة خطية أم لا. ويتم التحليل في هذا الاختبار تحت نفس الشروط المبينة في النموذج (٢٤ ـ ٢ ـ ٦) ما عدا خطية العلاقة. ولكي نتمكن من إجراء الاختبار يجب أن يتوفر لدينا أكثر من مشاهدة عند كل مستوى للمتغير س. وسوف نبيِّن كيفية إجراء الاختبار بالتمرين التالي:

| المشاهدة | المتغير س | المتغير ص |
|---|---|---|
| ١ | ١٢ | ١٨ |
| ٢ | ١٠ | ١١ |
| ٣ | ١٨ | ١٢ |
| ٤ | ٧ | ٢ |
| ٥ | ١٤ | ١٣ |
| ٦ | ١٧ | ١٩ |
| ٧ | ٧ | ٥ |
| ٨ | ١٧ | ١٢ |
| ٩ | ١٢ | ١٤ |
| ١٠ | ١٨ | ١٠ |
| ١١ | ١٠ | ١٣ |
| ١٢ | ١٤ | ١٥ |

العمليات الحسابية المبينة في الجدول التالي لازمة لتوفيق الخط المستقيم (٢٤ - ٢ - ٦) بطريقة المربعات الصغرى.

| المشاهدة | س | ص | $س^{٢}$ | س ص |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ١٢ | ١٨ | ١٤٤ | ٢١٦ |
| ٢ | ١٠ | ١١ | ١٠٠ | ١١٠ |
| ٣ | ١٨ | ١٢ | ٣٢٤ | ٢١٦ |
| ٤ | ٧ | ٢ | ٤٩ | ١٤ |
| ٥ | ١٤ | ١٣ | ١٩٦ | ١٨٢ |
| ٦ | ١٧ | ١٩ | ٢٨٩ | ٣٢٣ |
| ٧ | ٧ | ٥ | ٤٩ | ٣٥ |
| ٨ | ١٧ | ١٢ | ٢٨٩ | ٢٠٤ |
| ٩ | ١٢ | ١٤ | ١٤٤ | ١٦٨ |
| ١٠ | ١٨ | ١٠ | ٣٢٤ | ١٨٠ |
| ١١ | ١٠ | ١٣ | ١٠٠ | ١٣٠ |
| ١٢ | ١٤ | ١٥ | ١٩٦ | ٢١٠ |
| المجموع | ١٥٦ | ١٤٤ | ٢٢٠٤ | ١٩٨٨ |

$$\overline{س} = \frac{١٥٦}{١٢} = ١٣$$

$$\overline{ص} = \frac{١٤٤}{١٢} = ١٢$$

وبالتعويض في (١٩ - ٢ - ٦)، (٣٠ - ٢ - ٦) نجد أن:

$$\hat{ب} = \frac{١٩٨٨ - \frac{١٥٦ \times ١٤٤}{١٢}}{٢٢٠٤ - \frac{(١٥٦)^{٢}}{١٢}}$$

$$= \frac{١٩٨٨ - ١٨٧٢}{٢٢٠٤ - ٢٠٢٨}$$

$$= \frac{١١٦}{١٧٦}$$

$$= ٠,٦٥٩١$$

$$\hat{ب} = \frac{١٤٤}{١٢} - ٠,٦٥٩١ \times \frac{١٥٦}{١٢}$$

$$= ١٢ - ٨,٥٦٨٣$$

$$= ٣,٤٣١٧$$

$$\therefore \hat{ص} = ٠,٦٥٩١ \text{ س} + ٣,٤٣١٧$$

أما الحسابات التالية فإنها لازمة لتكوين جدول تحليل التباين:

| ص | $\hat{ص}$ | $(ص - \hat{ص})^٢$ | $(\hat{ص} - \bar{ص})^٢$ |
|---|---|---|---|
| ١٨ | ١١,٣ | ٤٤,٨٩ | ٠٠,٤٩ |
| ١٢ | ١٠,٠ | ٠٤,٠٠ | ٠٤,٠٠ |
| ١٢ | ١٥,٣ | ١٠,٨٩ | ١٠,٨٩ |
| ٢ | ٨,٥ | ٤٢,٢٥ | ١٢,٢٥ |
| ١٣ | ١٢,٧ | ٠٠,٠٩ | ٠٠,٤٩ |
| ١٩ | ١٤,٦ | ١٩,٣٦ | ٠٦,٧٦ |
| ٥ | ٨,٥ | ١٢,٢٥ | ١٢,٢٥ |
| ١٢ | ١٤,٦ | ٠٦,٧٦ | ٠٦,٧٦ |
| ١٤ | ١١,٣ | ٠٧,٢٩ | ٠٠,٤٩ |
| ١٠ | ١٥,٣ | ٢٨,٠٩ | ١٠,٨٩ |
| ١٣ | ١٠,٠ | ٠٩,٠٠ | ٠٤,٠٠ |
| ١٥ | ١٢,٧ | ٠٥,٢٩ | ٠٠,٤٩ |
| ١٤٤ | | ١٩٠,١٦ | ٦٩,٧٦ |

التفاوت الكلي = ١٩٠,١٦ + ٦٩,٧٦

= ٢٥٩,٩٢

مجموع المربعات الذي يعزى للخطأ النقي Pure Error يحسب كما يلي:

(١٨ - ١٦)^٢ + (١٤ - ١٦)^٢ + (١١ - ١٢)^٢ + (١٣ - ١٢)^٢ + (١٢ - ١١)^٢

+ (١٠ - ١١)^٢ + (٢ - ٣,٥)^٢ + (٥ - ٣,٥)^٢ + (١٣- ١٤)^٢ + (١٥ - ١٤)^٢

+ (١٩ - ١٥,٥)^٢ + (١٢ - ١٥,٥)^٢

= ٤ + ٤ + ١ + ١ + ١ + ١ + ٢,٢٥ + ٢,٢٥ + ١ + ١ + ١٢,٢٥ + ١٢,٢٥

= ٤٣

أما مجموع المربعات الذي يعزى لعدم مطابقة العلاقة الخطية Lack of Fit =
مجموع المربعات الذي يعزى للأخطاء - مجموع المربعات الذي يعزى للخطأ النقي
= ١٩٠,١٦ - ٤٣ = ١٤٧,١٦

درجات الحرية للخطأ النقي = عدد المشاهدات - عدد المجموعات التي فيها أرقام مكررة

= ١٢ - ٦ = ٦

درجات الحرية لعدم المطابقة = ١٠ - ٦ = ٤

والفرض الذي نريد اختباره هو $H_o$: العلاقة بين س، ص خطية.

وجدول تحليل التباين في هذه الحالة هو على النحو التالي.

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| الإنحدار | ٦٩,٧٦ | ١ | ٦٩,٧٦ | ٥,١٣ |
| الباقي | ١٩٠,١٦ | ١٠ | ١٩,٠٢ | |
| ١ ـ عدم المطابقة | ١٤٧,١٦ | ٤ | ٣٦,٧٩ | |
| ٢ ـ الخطأ النقي | ٤٣,٠٠ | ٦ | ٧,١٧ | |
| المجموع | ٢٥٩,٩٢ | ١١ | ٢٣,٦٣ | |

وإذا أردنا إختبار الفرض بمستوى معنوية ١٪ فإن

$ف_{٤،٦،٠,٠١}$ = ٩,١٥

وحيث أن ف < ٩,١٥ فإننا نقبل $H_o$، أي أن العلاقة بين س، ص خطية.

### (٣ ـ ٢ ـ ٨) تحليل التباين في النموذج الخطي العام

لمعرفة ما إذا كان المتغير التابع ص مرتبطا بالمتغيرات المستقلة فإننا نستخدم تحليل التباين وذلك بتجزئة التفاوت أو الإختلاف الكلي إلى إختلاف مفسّر يعزى للانحدار واختلاف غير مفسّر يعزى للعوامل العشوائية كما هو مبيّن في المعادلة (٦١ ـ ٢ ـ ٦)، وإذا اعتبرنا التمرين التوضيحي المعطى بعد هذه المعادلة فإنه يمكن تكوين جدول تحليل التباين كما يلي:

| مصدر التفاوت | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط مجموع المربعات | ف |
|---|---|---|---|---|
| الانحدار | ٣٢٨٠ | ٢ | ١٦٤٠ | ٧,٤٥٥ |
| الخطأ أو الباقي | ٢٨٦٠ | ١٣ | ٢٢٠ | |
| الكلي | ٦١٤٠ | ١٥ | | |

فإذا كان المطلوب هو إختبار الفرض التالي بمستوى معنوية ٥٪

$H_0$: $أ_١$ = صفر، $أ_٢$ = صفر

$H_0$: $أ_١ \neq$ صفر، $أ_٢ \neq$ صفر

فإن $ف_{٢،١٣،٠,٠٥}$ = ٣,٨

وحيث أن ٧,٤٥٥ > ٣,٨ فإننا نرفض الفرض بمستوى معنوية ٥٪ (أي أنه يوجد علاقة بين المتغير التابع ص والمتغيرين المستقلين $س_١$، $س_٢$)

وإذا كان مستوى المعنوية $\alpha$ = ٠,١ فإن

$ف_{٢،١٣،٠,٠١}$ = ٦,٧

وحيث أن ٧,٤٥٥ > ٦,٧ فإننا نرفض الفرض أيضاً بمستوى معنوية ١٪،

## أسئلة وتمارين (٨)

(١ - ٨) لدراسة أثر العلف على وزن الدجاج اللاحم، إختار باحث أربع مجموعات من الصيصان حديثة الفقس وقام بتغذية كل مجموعة منها بنوع معين من الأعلاف لمدة ثلاثة أسابيع فإذا كان الوزن الإضافي الذي كسبته هذه الصيصان خلال المدة المذكورة هو كما في الجدول التالي:

| المجموعة (١) | المجموعة (٢) | المجموعة (٣) | المجموعة (٤) |
|---|---|---|---|
| ٨٠ | ٩٥ | ٨٧ | ٧٦ |
| ١٠٠ | ١٢٠ | ٩٦ | ٨٤ |
| ١١٠ | ١٠٠ | ١٠٢ | ٩٢ |
| ٩٥ | ١٠٥ | ١١٢ | ١٢٠ |
| ٨٢ | ١٠٨ | ٩١ | ١١٥ |

اختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بأنه لا يوجد أثر لنوع العلف في زيادة وزن الدجاج اللاحم.

(٢ - ٨) لاختبار أثر المدرّس في مادة أح ١٠١ على تحصيل الطلبة اختيرت عشوائياً ثلاث مجموعات من طلبة ثلاثة مدرسين وأجري لهم إختباراً مشتركاً في المادة فكانت علاماتهم كما يلي:

| المدرس (١) | المدرس (٢) | المدرس (٣) |
|---|---|---|
| ٧٠ | ٧٤ | ٨٢ |
| ٦٠ | ٦٢ | ٥٤ |
| ٦٨ | ٥٠ | ٧٢ |
| ٨٢ | ٩١ | ٩٣ |
| ٨٦ | | ٦١ |

والمطلوب إختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد أثر للمدرس على مستوى تحصيل الطالب وذلك بمستوى معنوية ١٪.

(٣ - ٨) لدراسة أثر نوع الآلة النسيج على نسبة المعيب في إنتاج الكلسات النسائية إختار باحث عشوائياً ثلاث مجموعات من العمال، كل مجموعة منها تعمل على نوع مختلف من الآلات فكانت نسب المعيب في إنتاج هذه الآلات كما يلي:

| المجموعة (١) | المجموعة (٢) | المجموعة (٣) |
|---|---|---|
| ٠,٠٥ | ٠,٠١ | ٠,٠٨ |
| ٠,٠٢ | ٠,١٠ | ٠,٠٢ |
| ٠,٠٦ | ٠,٠٤ | ٠,٠٤ |
| ٠,٠٤ | ٠,٠٥ | ٠,٠٣ |
| | | ٠,٠٥ |

والمطلوب إختبار الفرض القائل بأنه لا يوجد أثر لنوع آلة النسيج على نسبة المعيب في الكلسات المنتجة وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

(٤ - ٨) الجدول التالي يبينّ كمية الصدأ المتراكم على حديد معالج بثلاثة أنواع من المواد الكيماوية أ، ب، جـ، إختبر بمستوى معنوية ٥٪ ما إذا كان هناك فرق بين المعالجات الثلاث في تراكم الصدأ:

| أ | ب | جـ |
|---|---|---|
| ٣ | ٤ | ٦ |
| ٥ | ٢ | ٤ |
| ٤ | ٣ | ٥ |
| ٤ | ٣ | ٥ |

(٥ - ٨) البيانات التالية تمثل عدد الوحدات المنتجة في اليوم الواحد لخمسة عمال متماثلين من حيث المستوى والتدريب باستخدام أربع الآت مختلفة.

إختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض القائل بعدم وجود فرق في الانتاجية بين الالات المختلفة.

نوع الآلة

| العامل | أ | ب | جـ | د |
|---|---|---|---|---|
| ١ | ٤٤ | ٣٨ | ٤٧ | ٣٦ |
| ٢ | ٤٦ | ٤٠ | ٥٢ | ٤٣ |
| ٣ | ٣٤ | ٣٦ | ٤٤ | ٣٢ |
| ٤ | ٤٣ | ٣٨ | ٤٦ | ٣٣ |
| ٥ | ٣٨ | ٤٢ | ٤٩ | ٣٩ |

(٦ - ٨) مستورد يمكنه استيراد أربعة أنواع مختلفة من اللمبات الكهربائية وقبل أن يتخذ قرار الاستيراد قام باختبار ثلاث لمبات من كل نوع لمعرفة متوسط عمر المصباح (بالمائة ساعة) حصل على النتائج التالية:

| النوع الأول | النوع الثاني | النوع الثالث | النوع الرابع |
|---|---|---|---|
| ٢٠ | ٢٥ | ٢٤ | ٢٣ |
| ١٩ | ٢٣ | ٢٠ | ٢٠ |
| ٢١ | ٢١ | ٢٢ | ٢٠ |

فهل يمكن الحكم (بمستوى معنوية ٥٪) بأن متوسطات العمر متساوية للأنواع المختلفة؟

(٧ - ٨) لدراسة العلاقة بين نوع العلف ونوع الأبقار ومتوسط الإنتاج اليومي من الحليب لهذه الأبقار أجريت تجربة على ثلاثة أنواع مختلفة من الأبقار (أ، ب، جـ) باستخدام ثلاثة أنواع مختلفة من العلف (١، ٢، ٣) وكانت النتائج كما يلي:

نوع البقر

| نوع العلف | | أ | ب | جـ |
|---|---|---|---|---|
| النوع الأول | (١) | ١٨ | ١٧ | ١٩ |
| النوع الثاني | (٢) | ١٩ | ٢٢ | ٢٠ |
| النوع الثالث | (٣) | ٢١ | ١٨ | ١٦ |

والمطلوب اختبار ما إذا كان هنالك أثر لنوع العلف أو لنوع الأبقار على متوسط الانتاج اليومي من الحليب وذلك بمستوى معنوية ١٪.

(٨ ـ ٨) الجدول التالي يبيِّن نتيجة دراسة أجريت لمعرفة أثر نوع التربة ونوع السماد على محصول القمح البعلي في إحدى المناطق (بالكغم / الدونم).

نوع التربة

| نوع السماد | أ | ب | جـ |
|---|---|---|---|
| النوع الأول | ٧٠٠ | ٦٨٠ | ٧١٠ |
| النوع الثاني | ٦٥٠ | ٧١٠ | ٧١٥ |
| النوع الثالث | ٦٨٠ | ٧٢٠ | ٧٠٠ |
| النوع الرابع | ٧٢٠ | ٧٠٠ | ٥٢٠ |
| النوع الخامس | ٦٠٠ | ٥٨٠ | ٦١٠ |

والمطلوب تكوين جدول لتحليل التباين واختبار ما إذا كان لنوع السماد ونوع التربة أثر على محصول القمح وذلك بمستوى معنوية ٥٪.

(٩ ـ ٨) لدراسة العلاقة بين محصول معيَّن ونوع البذار (١، ٢، ٣، ٤) ونوع السماد (I، II، III، IV) باستخدام أربعة طرق مختلفة من الرى (أ، ب، جـ، د) صنِّفت تجربة على شكل مربع لاتيني فكانت نتائج التجربة (بالكغم للدونم الواحد) كما يلي:

| نوع البذار | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| النوع الأول (١) | أ (٦٠٠) | ب (٦٥٠) | جـ (٦٨٠) | د (٧١٠) |
| النوع الثاني (٢) | ب (٧٠٠) | جـ (٦٤٠) | د (٧١٠) | أ (٧٠٠) |
| النوع الثالث (٣) | جـ (٦٦٠) | د (٦٩٠) | أ (٦١٠) | ب (٦٩٠) |
| النوع الرابع (٤) | د (٦٢٠) | أ (٦٧٠) | ب (٦٩٠) | جـ (٧٢٠) |

والمطلوب تحليل نتائج هذه التجربة لمعرفة أثر كل عامل من العوامل الثلاث على المحصول.

(١٠ ـ ٨) لمعرفة أثر مجموعة من البرامج التدريبية (أ، ب، جـ، د) على مستوى إنتاجية عمال شركة ما، قامت دائرة الأبحاث والدراسات في هذه الشركة

بتصنيفهم حسب المستوى التعليمي (عال، متوسط، منخفض) والحقت ستة عمال من كل مستوى بكل برنامج من البرامج الأربعة، وبعد انتهاء فترة التدريب والتحاقهم بالشركة جمع الإنتاج اليومي (بالوحدة) لكل منهم وكانت النتائج كما هو مبينّ في الجدول التالي:

| مستوى التعليم | البرنامج | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | أ | | ب | | جـ | | د | |
| عـال | ٩٠ | ٨٥ | ٨٢ | ٨٥ | ٨٢ | ٨٤ | ٨٨ | ٨٦ |
| | ٨٢ | ٧٤ | ٨٠ | ٨٤ | ٨٥ | ٨٧ | ٨٠ | ٦٨ |
| | ٨٥ | ٨٨ | ٧٨ | ٨٠ | ٩٠ | ٩٢ | ٩٤ | ٨٤ |
| متوسط | ٨٠ | ٨٣ | ٧٥ | ٧٧ | ٨٥ | ٧٢ | ٧٥ | ٨٥ |
| | ٨٥ | ٨٧ | ٧٨ | ٧٥ | ٧٥ | ٧٨ | ٩٢ | ٨٧ |
| | ٧٨ | ٨١ | ٨٠ | ٨٢ | ٨٢ | ٦٨ | ٨٠ | ٧٠ |
| منخفض | ٨٢ | ٦٥ | ٨٥ | ٨٧ | ٦٥ | ٧٠ | ٨٨ | ٩٠ |
| | ٧٠ | ٨٠ | ٧٢ | ٦٢ | ٧٠ | ٦٢ | ٨٨ | ٩٠ |
| | ٧٨ | ٨٢ | ٥٤ | ٧٢ | ٧٢ | ٨٢ | ٩٢ | ٦٨ |

والمطلوب تكوين جدول لتحليل التباين واختبار، بمستوى معنوية ٥٪، الفروض التالية:

١ ـ لا يوجد أثر لمستوى التعليم على إنتاجية العامل.

٢ ـ لا يوجد أثر للبرنامج التدريبي على إنتاجية العامل.

٣ ـ لا يوجد تفاعل مزدوج بين مستوى التعليم والبرنامج التدريبي.

(١١ ـ ٨) إذا كان عدد التلفزيونات المباعة يعتمد على قدرة البائع ونوع التلفزيون المباع. فإذا وجد أن عدد التلفزيونات المباعة في محل لتوزيع الأجهزة الكهربائية كما هو مبينّ في الجدول التالي:

| نوع التلفزيون | البائع أ | | ب | | جـ | | د | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٥ | ٦ | ٣ | ٤ | ٣ | ٣ | ٤ | ١ |
| | ٥ | ٤ | ٣ | ١ | ٧ | ٢ | صفر | صفر |
| ٢ | ٧ | ٩ | ٤ | ٥ | صفر | ٣ | ١٠ | ٦٥ |
| | ١٠ | ١٢ | ٨ | ٢ | ٤ | ٢ | ١٦ | ٩ |
| ٣ | ١ | ٣ | ١ | صفر | ١ | ١ | صفر | ٣ |
| | ٤ | ٥ | صفر | ١ | ١ | ٢ | ٤ | ٣ |

كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٪ الفروض التالية:

١ ـ لا يوجد فرق بين قدرات الباعة أ، ب، جـ، د من حيث عدد التلفزيونات المباعة.

٢ ـ لا يوجد فرق بين الأنواع ١ ، ٢ ، ٣ من حيث عدد التلفزيونات المباعة.

٣ ـ لا يوجد تفاعل مزدوج بين قدرة البائع ونوع التلفزيون.

(١٢ ـ ٨) إذا كان لدينا أربعة أنواع مختلفة من السيارات (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) واستخدمنا أربعة سواقين (I ، II ، III ، IV) وأربعة أنواع مختلفة من البنزين (أ ، ب ، جـ ، د) لمعرفة عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة بالجالون الواحد من البنزين وحصلنا على النتائج التالية:

| السيارة | السائق I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| ١ | أ (٤٥) | ب (٦٠) | جـ (٥٥) | د (٣٠) |
| ٢ | ب (٦٠) | جـ (٥٨) | د (٢٨) | أ (٤٣) |
| ٣ | جـ (٥٢) | د (٣٢) | أ (٤٧) | ب (٦٣) |
| ٤ | د (٢٠) | أ (٥٥) | ب (٦٥) | جـ (٥٠) |

كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ أثر كل من نوع السيارة ونوع البنزين والسائق على عدد الكيلومترات التي تقطعها السيارة بالجالون الواحد.

(٨ - ١٣) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٥ - ٧)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واستخدم هذا الجدول في اختبار ما إذا كان هناك علاقة بين حجم النفقات الشهرية وحجم المبيعات وذلك بمستوى معنوية ١٪. اختبر بمستوى معنوية ٥٪ خطية العلاقة بين س، ص.

(٨ - ١٤) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٦ - ٧)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ خطية العلاقة بين س، ص.

(٨ - ١٥) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٧ - ٧)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٠٪.

١ - الفرض القائل بعدم وجود علاقة بين س، ص.

٢ - الفرض القائل بعدم ملاءمة النموذج الخطي البسيط لتمثيل العلاقة بين س، ص.

(٨ - ١٦) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٨ - ٧)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واستخدمه في اختبار الفرض التالي بمستوى معنوية ٥٪.

$H_o$ : أ$_1$ = صفر، أ$_2$ = صفر

(٨ - ١٧) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٢٣ - ٦)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ٥٪ الفرض التالي:

$H_o$ : أ$_1$ = صفر، أ$_2$ = صفر

(٨ - ١٨) بالرجوع إلى بيانات التمرين (٣١ - ٧)، كوّن جدولاً لتحليل التباين واختبر بمستوى معنوية ١٪ الفرض التالي:

$H_o$ : أ$_1$ = صفر، أ$_2$ = صفر

# جدول رقم (١) توزيع ذي الحدين

| ن | ح / ر | ٠,٠١ | ٠,٠٥ | ٠,١ | ٠,٢ | ٠,٣ | $\frac{1}{3}$ | ٠,٤ | ٠,٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ٠ | ٠,٩٨٠١ | ٠,٩٠٢٥ | ٠,٨١٠٠ | ٠,٦٤٠٠ | ٠,٤٩٠٠ | ٠,٤٤٤٤ | ٠,٣٦٠٠ | ٠,٢٥٠٠ |
| | ١ | ٠,٠١٩٨ | ٠,٠٩٥٠ | ٠,١٨٠٠ | ٠,٣٢٠٠ | ٠,٤٢٠٠ | ٠,٤٤٤٤ | ٠,٤٨٠٠ | ٠,٥٠٠٠ |
| | ٢ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠٢٥ | ٠,٠١٠٠ | ٠,٠٤٠٠ | ٠,٠٩٠٠ | ٠,١١١١ | ٠,١٦٠٠ | ٠,٢٥٠٠ |
| ٣ | ٠ | ٠,٩٧٠٣ | ٠,٩٥٧٤ | ٠,٧٢٩٠ | ٠,٥١٢٠ | ٠,٣٤٣٠ | ٠,٢٩٦٣ | ٠,٢١٦٠ | ٠,١٢٥٠ |
| | ١ | ٠,٠٢٩٤ | ٠,١٣٥٤ | ٠,٢٤٣٠ | ٠,٣٨٤٠ | ٠,٤٤١٠ | ٠,٤٤٤٤ | ٠,٤٣٢٠ | ٠,٣٧٥٠ |
| | ٢ | ٠,٠٠٠٣ | ٠,٠٠٧١ | ٠,٠٢٧٠ | ٠,٠٩٦٠ | ٠,١٨٩٠ | ٠,٢٢٢٢ | ٠,٢٨٨٠ | ٠,٣٧٥٠ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠١٠ | ٠,٠٠٨٠ | ٠,٠٢٧٠ | ٠,٠٣٧٠ | ٠,٠٦٤٠ | ٠,١٢٥٠ |
| ٤ | ٠ | ٠,٩٦٠٦ | ٠,٨١٤٥ | ٠,٦٥٦١ | ٠,٤٠٩٦ | ٠,٢٤٠١ | ٠,١٩٧٥ | ٠,١٢٩٦ | ٠,٠٦٢٥ |
| | ١ | ٠,٠٣٨٨ | ٠,١٧١٥ | ٠,٢٩١٦ | ٠,٤٠٩٦ | ٠,٤١١٦ | ٠,٣٩٥١ | ٠,٣٤٥٦ | ٠,٢٥٠٠ |
| | ٢ | ٠,٠٠٠٦ | ٠,٠١٣٥ | ٠,٠٤٨٦ | ٠,١٥٣٦ | ٠,٢٦٤٦ | ٠,٢٩٦٣ | ٠,٣٤٥٦ | ٠,٣٧٥٠ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٥ | ٠,٠٠٣٦ | ٠,٠٢٥٦ | ٠,٠٧٥٦ | ٠,٠٩٨٨ | ٠,١٥٣٦ | ٠,٢٥٠٠ |
| | ٤ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠١٦ | ٠,٠٠٨١ | ٠,٠١٢٣ | ٠,٠٢٥٦ | ٠,٠٦٢٥ |
| ٥ | ٠ | ٠,٩٥١٠ | ٠,٧٧٣٨ | ٠,٥٩٠٥ | ٠,٣٢٧٧ | ٠,١٦٨١ | ٠,١٣١٧ | ٠,٠٧٧٨ | ٠,٠٣١٢ |
| | ١ | ٠,٠٤٨٠ | ٠,٢٠٣٦ | ٠,٣٢٨٠ | ٠,٤٠٩٦ | ٠,٣٦٠٢ | ٠,٣٢٩٢ | ٠,٣٥٩٢ | ٠,١٥٦٢ |
| | ٢ | ٠,٠٠١٠ | ٠,٠٢١٤ | ٠,٠٧٢٩ | ٠,٢٠٤٨ | ٠,٣٠٨٧ | ٠,٣٢٩٢ | ٠,٣٤٥٦ | ٠,٣١٢٥ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠١١ | ٠,٠٠٨١ | ٠,٠٥١٢ | ٠,١٣٢٣ | ٠,١٦٤٦ | ٠,٢٣٠٤ | ٠,٣١٢٥ |
| | ٤ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٤ | ٠,٠٠٦٤ | ٠,٠٢٨٤ | ٠,٠٤١٢ | ٠,٠٧٦٨ | ٠,١٥٦٢ |
| | ٥ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٣ | ٠,٠٠٢٤ | ٠,٠٠٤١ | ٠,٠١٠٢ | ٠,٠٣١٢ |
| ٦ | ٠ | ٠,٩٤١٥ | ٠,٧٣٥١ | ٠,٥٣١٤ | ٠,٢٦٢١ | ٠,١١٧٦ | ٠,٠٨٧٨ | ٠,٠٤٦٧ | ٠,٠١٥٦ |
| | ١ | ٠,٠٥٧١ | ٠,٢٣٢١ | ٠,٣٥٤٣ | ٠,٣٩٣٢ | ٠,٣٠٢٥ | ٠,٢٦٣٤ | ٠,١٨٦٦ | ٠,٠٩٣٨ |
| | ٢ | ٠,٠٠١٤ | ٠,٠٣٠٥ | ٠,٠٩٨٤ | ٠,٢٤٥٨ | ٠,٣٢٤١ | ٠,٣٢٩٢ | ٠,٣١١٠ | ٠,٢٣٤٤ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٢١ | ٠,٠١٤٦ | ٠,٠٨١٩ | ٠,١٨٥٢ | ٠,٢١٩٥ | ٠,٢٧٦٥ | ٠,٣١٢٥ |
| | ٤ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠١٢ | ٠,٠١٥٤ | ٠,٠٥٩٥ | ٠,٠٨٢٣ | ٠,١٣٨٢ | ٠,٢٣٤٤ |
| | ٥ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠١٥ | ٠,٠١٠٢ | ٠,٠١٦٥ | ٠,٠٣٦٩ | ٠,٠٩٣٨ |
| | ٦ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠٠٧ | ٠,٠٠١٤ | ٠,٠٠٤١ | ٠,٠١٥٦ |

| ن | ح / ر | ٠,٠١ | ٠,٠٥ | ٠,١ | ٠,٢ | ٠,٣ | ١/٣ | ٠,٤ | ٠,٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٧ | ٠ | ٠,٩٣٢١ | ٠,٦٩٨٣ | ٠,٤٧٨٣ | ٠,٢٠٩٧ | ٠,٠٨٢٤ | ٠,٠٥٨٥ | ٠,٠٢٨٠ | ٠,٠٠٧٨ |
| | ١ | ٠,٠٦٥٩ | ٠,٢٥٧٣ | ٠,٣٧٢٠ | ٠,٣٦٧٠ | ٠,٢٤٧١ | ٠,٢٠٤٨ | ٠,١٣٠٦ | ٠,٠٥٤٧ |
| | ٢ | ٠,٠٠٢٠ | ٠,٠٤٠٦ | ٠,١٢٤٠ | ٠,٢٧٥٣ | ٠,٣١٧٧ | ٠,٣٠٧٣ | ٠,٢٦١٣ | ٠,١٦٤١ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٣٦ | ٠,٠٢٣٠ | ٠,١١٤٧ | ٠,٢٢٦٩ | ٠,٢٥٦١ | ٠,٢٩٠٣ | ٠,٢٧٣٤ |
| | ٤ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٢ | ٠,٠٠٢٦ | ٠,٠٢٨٧ | ٠,٠٩٧٢ | ٠,١٢٨٠ | ٠,١٩٣٥ | ٠,٢٧٣٤ |
| | ٥ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٢ | ٠,٠٠٤٣ | ٠,٠٢٥٠ | ٠,٠٣٩٤ | ٠,٠٧٧٤ | ٠,١٦٤١ |
| | ٦ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٤ | ٠,٠٠٣٦ | ٠,٠٠٦٤ | ٠,٠١٧٢ | ٠,٠٥٤٧ |
| | ٧ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٢ | ٠,٠٠٠٥ | ٠,٠٠١٦ | ٠,٠٠٧٨ |
| ٨ | ٠ | ٠,٩٢٢٧ | ٠,٦٦٣٤ | ٠,٤٣٠٥ | ٠,١٦٧٨ | ٠,٠٥٧٦ | ٠,٠٣٩٠ | ٠,٠١٦٨ | ٠,٠٠٣٩ |
| | ١ | ٠,٠٧٤٦ | ٠,٢٧٩٣ | ٠,٣٨٢٦ | ٠,٣٣٥٥ | ٠,١٩٧٧ | ٠,١٥٦١ | ٠,٠٨٩٦ | ٠,٠٣١٢ |
| | ٢ | ٠,٠٠٢٦ | ٠,٠٥١٥ | ٠,١٤٨٨ | ٠,٢٩٣٦ | ٠,٢٩٦٥ | ٠,٢٧٣١ | ٠,٢٠٩٠ | ٠,١٠٩٤ |
| | ٣ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠٥٤ | ٠,٠٣٣١ | ٠,١٤٦٨ | ٠,٢٥٤١ | ٠,٢٧٣١ | ٠,٢٧٨٧ | ٠,٢١٨٨ |
| | ٤ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٤ | ٠,٠٠٤٦ | ٠,٠٤٥٩ | ٠,١٣٦١ | ٠,١٧٠٧ | ٠,٢٣٢٢ | ٠,٢٧٣٤ |
| | ٥ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٤ | ٠,٠٠٩٢ | ٠,٠٤٦٧ | ٠,٠٦٨٣ | ٠,١٢٣٩ | ٠,٢١٨٨ |
| | ٦ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠١١ | ٠,٠١٠٠ | ٠,٠١٧١ | ٠,٠٤١٣ | ٠,١٠٩٤ |
| | ٧ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠١٢ | ٠,٠٠٢٤ | ٠,٠٠٧٩ | ٠,٠٣١٢ |
| | ٨ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠٠ | ٠,٠٠٠١ | ٠,٠٠٠٢ | ٠,٠٠٠٠٧ | ٠,٠٠٣٩ |

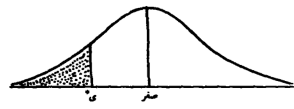
## جدول رقم (٢) توزيع بواسون الإحتمالي المتجمع الصاعد

| θ \ ر | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٠٥ | ٠,٩٥١ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | | | |
| ٠,١٠ | ٠,٩٠٥ | ٠,٩٩٥ | ١,٠٠٠ | | | | | |
| ٠,١٥ | ٠,٨٦١ | ٠,٩٩٠ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | | |
| ٠,٢٠ | ٠,٨١٩ | ٠,٩٨٢ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | | |
| ٠,٢٥ | ٠,٧٧٩ | ٠,٩٧٤ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | | | |
| ٠,٣٠ | ٠,٧٤١ | ٠,٩٦٣ | ٠,٩٩٦ | ١,٠٠٠ | | | | |
| ٠,٣٥ | ٠,٧٠٥ | ٠,٩٥١ | ٠,٩٩٤ | ١,٠٠٠ | | | | |
| ٠,٤٠ | ٠,٦٧٠ | ٠,٩٣٨ | ٠,٩٩٢ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | |
| ٠,٤٥ | ٠,٦٣٨ | ٠,٩٢٥ | ٠,٩٨٩ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | |
| ٠,٥٠ | ٠,٦٠٧ | ٠,٩١٠ | ٠,٩٨٦ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | |
| ٠,٥٥ | ٠,٥٧٧ | ٠,٨٩٤ | ٠,٩٨٢ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | | |
| ٠,٦٠ | ٠,٥٤٩ | ٠,٨٧٨ | ٠,٩٧٧ | ٠,٩٩٧ | ١,٠٠٠ | | | |
| ٠,٦٥ | ٠,٥٢٢ | ٠,٨٦١ | ٠,٩٧٢ | ٠,٩٩٦ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٧٠ | ٠,٤٩٧ | ٠,٨٤٤ | ٠,٩٦٦ | ٠,٩٩٤ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٧٥ | ٠,٤٧٢ | ٠,٨٢٧ | ٠,٩٥٩ | ٠,٩٩٣ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٨٠ | ٠,٤٤٩ | ٠,٨٠٩ | ٠,٩٥٣ | ٠,٩٩١ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٨٥ | ٠,٤٢٧ | ٠,٧٩١ | ٠,٩٤٥ | ٠,٩٨٩ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٩٠ | ٠,٤٠٧ | ٠,٧٧٢ | ٠,٩٣٧ | ٠,٩٨٧ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | |
| ٠,٩٥ | ٠,٣٨٧ | ٠,٧٥٤ | ٠,٩٢٩ | ٠,٩٨٤ | ٠,٩٩٧ | ١,٠٠٠ | | |
| ١,٠٠ | ٠,٣٦٨ | ٠,٧٣٦ | ٠,٩٢٠ | ٠,٩٨١ | ٠,٩٩٦ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | |
| ١,١ | ٠,٣٣٣ | ٠,٦٩٩ | ٠,٩٠٠ | ٠,٩٧٤ | ٠,٩٩٥ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | |
| ١,٢ | ٠,٣٠١ | ٠,٦٦٣ | ٠,٨٧٩ | ٠,٩٦٦ | ٠,٩٩٢ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | |
| ١,٣ | ٠,٢٧٣ | ٠,٦٢٧ | ٠,٨٥٧ | ٠,٩٥٧ | ٠,٩٨٩ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | |
| ١,٤ | ٠,٢٤٧ | ٠,٥٩٢ | ٠,٨٣٣ | ٠,٩٤٦ | ٠,٩٨٦ | ٠,٩٩٧ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ |
| ١,٥ | ٠,٢٢٣ | ٠,٥٥٨ | ,٨٠٩ | ٠,٩٣٤ | ٠,٩٨١ | ٠,٩٩٦ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ |

**تابع جدول رقم (٢)**

| ر / θ | صفر | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١,٦ | ٠,٢٠٢ | ٠,٥٢٥ | ٠,٧٨٣ | ٠,٩٢١ | ٠,٩٧٦ | ٠,٩٩٤ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | | |
| ١,٧ | ٠,١٨٣ | ٠,٤٩٣ | ٠,٧٥٧ | ٠,٩٠٧ | ٠,٩٠٧ | ٠,٩٩٢ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | | |
| ١,٨ | ٠,١٦٥ | ٠,٤٦٣ | ٠,٧٣١ | ٠,٨٩١ | ٠,٩٦٤ | ٠,٩٩٠ | ٠,٩٩٧ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ١,٩ | ٠,١٥٠ | ٠,٤٣٤ | ٠,٧٠٤ | ٠,٨٧٥ | ٠,٩٥٦ | ٠,٩٨٧ | ٠,٩٩٧ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٢,٠ | ٠,١٣٥ | ٠,٤٠٦ | ٠,٦٧٧ | ٠,٨٥٧ | ٠,٩٤٧ | ٠,٩٨٣ | ٠,٩٩٥ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | | |
| ٢,٢ | ٠,١١١ | ٠,٣٥٥ | ٠,٦٢٣ | ٠,٨١٩ | ٠,٩٢٨ | ٠,٩٧٥ | ٠,٩٩٣ | ٠,٩٩٨ | ١,٠٠٠ | | |
| ٢,٤ | ٠,٠٩١ | ٠,٣٠٨ | ٠,٥٧٠ | ٠,٧٧٩ | ٠,٩٠٤ | ٠,٩٦٤ | ٠,٩٨٨ | ٠,٩٩٧ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | |
| ٢,٦ | ٠,٠٧٤ | ٠,٢٦٧ | ٠,٥١٨ | ٠,٧٣٦ | ٠,٨٧٧ | ٠,٩٥١ | ٠,٩٨٣ | ٠,٩٩٥ | ٠,٩٩٩ | ١,٠٠٠ | |
| ٢,٨ | ٠,٠٦١ | ٠,٢٣١ | ٠,٤٦٩ | ٠,٦٩٢ | ٠,٧٤٨ | ٠,٩٣٥ | ٠,٩٧٦ | ٠,٩٩٢ | ٠,٩٩٨ | ٠,٩٩٩ | ١ |
| ٣,٠ | ٠,٠٥٠ | ٠,١٩٩ | ٠,٤٢٣ | ٠,٦٤٧ | ٠,٨١٥ | ٠,٩١٦ | ٠,٩٦٦ | ٠,٩٨٨ | ٠,٩٩٦ | ٠,٩٩٩ | ١ |

**جدول رقم (٣): التوزيع المعتاد القياسي، المساحات تحت المنحنى**




| ي* | ح(ي < ي*) | ي* | ح (ي < ي*) | ي* | ح (ي < ي*) | تكرارات نسبية مختارة | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ي* | ح (ي < ي*) |
| -٣,٢٥ | ٠,٠٠٠٦ | -٢,٠٠ | ٠,٠٢٢٨ | -٠,٧٥ | ٠,٢٢٦٦ | -٤,٢٦٥ | ٠,٠٠٠٠١ |
| -٣,٢٠ | ٠,٠٠٠٧ | -١,٩٥ | ٠,٠٢٥٦ | -٠,٧٠ | ٠,٢٤٢٠ | -٣,٧١٩ | ٠,٠٠٠١ |
| -٣,١٥ | ٠,٠٠٠٨ | -١,٩٠ | ٠,٠٢٨٧ | -٠,٦٥ | ٠,٢٥٧٨ | -٣,٠٩٠ | ٠,٠٠١ |
| -٣,١٠ | ٠,٠٠١٠ | -١,٨٥ | ٠,٠٣٢٢ | -٠,٦٠ | ٠,٢٧٤٣ | -٢,٥٧٦ | ٠,٠٠٥ |
| | | | | | | -٢,٣٢٦ | ٠,٠١ |
| -٣,٠٥ | ٠,٠٠١١ | -١,٨٠ | ٠,٠٣٥٩ | -٠,٥٥ | ٠,٢٩١٢ | -٢,٠٥٤ | ٠,٠٢ |
| -٣,٠٠ | ٠,٠٠١٣ | -١,٧٥ | ٠,٠٤٠١ | -٠,٥٠ | ٠,٣٠٨٥ | -١,٩٦٠ | ٠,٠٢٥ |
| -٢,٩٥ | ٠,٠٠١٦ | -١,٧٠ | ٠,٠٤٤٦ | -٠,٤٥ | ٠,٣٢٦٤ | -١,٨٨١ | ٠,٠٣ |
| -٢,٩٠ | ٠,٠٠١٩ | -١,٦٥ | ٠,٠٤٩٥ | -٠,٤٠ | ٠,٣٤٤٦ | -١,٧٥١ | ٠,٠٤ |
| -٢,٨٥ | ٠,٠٠٢٢ | -١,٦٠ | ٠,٠٥٤٨ | -٠,٣٥ | ٠,٣٦٣٢ | -١,٦٤٥ | ٠,٠٥ |
| -٢,٨٠ | ٠,٠٠٢٦ | ١,٥٥ | ٠,٠٦٠٦ | -٠,٣٠ | ٠,٣٨٢١ | -١,٥٥٥ | ٠,٠٦ |
| -٢,٧٥ | ٠,٠٠٣٠ | -١,٥٠ | ٠,٠٦٦٨ | -٠,٢٥ | ٠,٤٠١٣ | -١,٤٧٦ | ٠,٠٧ |
| -٢,٧٠ | ٠,٠٠٣٥ | -١,٤٥ | ٠,٠٧٣٥ | -٠,٢٠ | ٠,٤٢٠٧ | -١,٤٠٥ | ٠,٠٨ |
| -٢,٦٥ | ٠,٠٠٤٠ | -١,٤٠ | ٠,٠٨٠٨ | -٠,١٥ | ٠,٤٤٠٤ | -١,٣٤١ | ٠,٠٩ |
| -٢,٦٠ | ٠,٠٠٤٧ | -١,٣٥ | ٠,٠٨٨٥ | -٠,١٠ | ٠,٤٦٠٢ | -١,٢٨٢ | ٠,١٠ |
| -٢,٥٥ | ٠,٠٠٥٤ | -١,٣٠ | ٠,٠٩٦٨ | -٠,٠٥ | ٠,٤٨٠١ | -١,٠٣٦ | ٠,١٥ |
| -٢,٥٠ | ٠,٠٠٦٢ | -١,٢٥ | ٠,١٠٥٦ | | | -٠,٨٤٢ | ٠,٢٠ |
| -٢,٤٥ | ٠,٠٠٧١ | -١,٢٠ | ٠,١١٥١ | | | -٠,٦٧٤ | ٠,٢٥ |
| -٢,٤٠ | ٠,٠٠٨٢ | -١,١٥ | ٠,١٢٥١ | | | -٠,٥٢٤ | ٠,٣٠ |
| -٢,٣٥ | ٠,٠٠٩٤ | -١,١٠ | ٠,١٣٥٧ | صفر | ٠,٥٠٠٠ | -٠,٣٨٥ | ٠,٣٥ |
| -٢,٣٠ | ٠,٠١٠٧ | -١,٠٥ | ٠,١٤٦٩ | | | -٠,٢٥٣ | ٠,٤٠ |
| -٢,٢٥ | ٠,٠١٢٢ | -١,٠٠ | ٠,١٥٨٧ | | | -٠,١٢٦ | ٠,٤٥ |
| -٢,٢٠ | ٠,٠١٣٩ | -٠,٩٥ | ٠,١٧١١ | +٠,٠٥ | ٠,٥١٩٩ | صفر | ٠,٥٠ |
| -٢,١٥ | ٠,٠١٥٨ | -٠,٩٠ | ٠,١٨٤١ | +٠,١٠ | ٠,٥٣٩٨ | ٠,١٢٦ | ٠,٥٥ |
| -٢,١٠ | ٠,٠١٧٩ | -٠,٨٥ | ٠,١٩٧٧ | +٠,١٥ | ٠,٥٥٩٦ | ٠,٢٥٣ | ٠,٦٠ |
| -٢,٠٥ | ٠,٠٢٠٢ | -٠,٨٠ | ٠,٢١١٩ | +٠,٢٠ | ٠,٥٧٩٣ | ٠,٣٨٥ | ٠,٦٥ |

## تابع جدول رقم (٣)

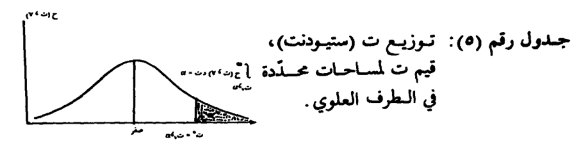
| ى | ح (ى < ى*) | ى* | ح (ى < ى*) | ى* | ح (ى < ى*) | تكرارات نسبية مختارة: ى* | ح (ى > ى*) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٢٥ | ٠,٥٩٨٧ | ١,٣٠ | ٠,٩٠٣٢ | ٢,٣٠ | ٠,٩٨٩٣ | ٠,٥٢٤ | ٠,٧٠ |
| ٠,٣٠ | ٠,٦١٧٩ | ١,٣٥ | ٠,٩١١٥ | ٢,٣٥ | ٠,٩٩٠٦ | ٠,٦٧٤ | ٠,٧٥ |
| ٠,٣٥ | ٠,٦٣٦٨ | ١,٤٠ | ٠,٩١٩٢ | ٢,٤٠ | ٠,٩٩١٨ | ٠,٨٤٢ | ٠,٨٠ |
| ٠,٤٠ | ٠,٦٥٥٤ | ١,٤٥ | ٠,٩٢٦٠ | ٢,٤٥ | ٠,٩٩٢٩ | ١,٠٣٦ | ٠,٨٥ |
| ٠,٤٥ | ٠,٦٧٣٦ | ١,٥٠ | ٠,٩٣٣٢ | ٢,٥٠ | ٠,٩٩٣٨ | ١,٢٨٢ | ٠,٩٠ |
| ٠,٥٠ | ٠,٦٩١٥ | ١,٥٥ | ٠,٩٣٩٤ | ٢,٥٥ | ٠,٩٩٤٦ | ١,٣٤١ | ٠,٩١ |
| ٠,٥٥ | ٠,٧٠٨٨ | ١,٦٠ | ٠,٩٤٥٢ | ٢,٦٠ | ٠,٩٩٥٣ | ١,٤٠٥ | ٠,٩٢ |
| ٠,٦٠ | ٠,٧٢٥٧ | ١,٦٥ | ٠,٩٥٠٥ | ٢,٦٥ | ٠,٩٩٦٠ | ١,٤٧٦ | ٠,٩٣ |
| ٠,٦٥ | ٠,٧٤٢٢ | ١,٧٠ | ٠,٩٥٥٤ | ٢,٧٠ | ٠,٩٩٦٥ | ١,٥٥٥ | ٠,٩٤ |
| ٠,٧٠ | ٠,٧٥٨٠ | ١,٧٥ | ٠,٩٥٩٩ | ٢,٧٥ | ٠,٩٩٧٠ | ١,٦٤٥ | ٠,٩٥ |
| ٠,٧٥ | ٠,٧٧٣٤ | ١,٨٠ | ٠,٩٦٤١ | ٢,٨٠ | ٠,٩٩٧٤ | ١,٧٥١ | ٠,٩٦ |
| ٠,٨٠ | ٠,٧٨٨١ | ١,٨٥ | ٠,٩٦٧٨ | ٢,٨٥ | ٠,٩٩٧٨ | ١,٨٨١ | ٠,٩٧ |
| ٠,٨٥ | ٠,٨٠٢٣ | ١,٩٠ | ٠,٩٧١٣ | ٢,٩٠ | ٠,٩٩٨١ | ١,٩٦٠ | ٠,٩٧٥ |
| ٠,٩٠ | ٠,٨٥١٩ | ١,٩٥ | ٠,٩٧٤٤ | ٢,٩٥ | ٠,٩٩٨٤ | ٢,٠٥٤ | ٠,٩٨ |
| ٠,٩٥ | ٠,٨٢٨٩ | ٢,٠٠ | ٠,٩٧٧٢ | ٣,٠٠ | ٠,٩٩٨٧ | ٢,٣٢٦ | ٠,٩٩ |
| ١,٠٠ | ٠,٨٤١٣ | ٢,٠٥ | ٠,٩٧٩٨ | ٣,٠٥ | ٠,٩٩٨٩ | ٢,٥٧٦ | ٠,٩٩٥ |
| ١,٠٠ | ٠,٨٥٣١ | ٢,١٠ | ٠,٩٨٢١ | ٣,١٠ | ٠,٩٩٩٠ | ٣,٠٩٠ | ٠,٩٩٩ |
| ١,١٠ | ٠,٨٦٤٣ | ٢,١٥ | ٠,٩٨٤٢ | ٣,١٥ | ٠,٩٩٩٣ | ٣,٧١٩ | ٠,٩٩٩٩ |
| ١,١٥ | ٠,٨٧٤٩ | ٢,٢٠ | ٠,٩٨٦١ | ٣,٢٠ | ٠,٩٩٩٣ | ٤,٢٦٥ | ٠,٩٩٩٩٩ |
| ١,٢٠ | ٠,٨٨٤٩ | ٢,٢٥ | ٠,٩٨٧٨ | ٣,٢٥ | ٠,٩٩٩٤ | | |

**جدول رقم (٤): توزيع $\chi^2$، قيم $\chi^2$ لمساحات محددة في الطرف العلوي**

| ٧ درجات الحرية | المساحة في الطرف العلوي | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ٠,٠٠١ | ٠,٠١ | ٠,٠٥ | ٠,١٠ | ٠,٥٠ | ٠,٩٠٠ | ٠,٩٩ |
| ١ | ١٠,٨٢٧ | ٥,٦٣٥ | ٣,٨٤١ | ٢,٧٠٦ | ٠,٤٥٥ | ٠,١٥٨ | ٠,٠٠٠١٥٧ |
| ٢ | ١٣,٨١٥ | ٩,٢١٠ | ٥,٩٩١ | ٤,٦٠٥ | ١,٣٨٦ | ٠,٢١١ | ٠,٠٢٠١ |
| ٣ | ١٦,٢٦٨ | ١١,٣٤١ | ٧,٨١٥ | ٦,٢٥١ | ٢,٣٦٦ | ٠,٥٨٤ | ٠,١١٥ |
| ٤ | ١٨,٤٦٥ | ١٣,٢٧٧ | ٩,٤٨٨ | ٧,٧٧٩ | ٣,٣٥٧ | ١,٠٦٤ | ٠,٢٩٧ |
| ٥ | ٢٠;٥١٧ | ١٥,٠٨٦ | ١١,٠٧٠ | ٩,٢٣٦ | ٤,٣٥١ | ١,٦١٠ | ٠,٥٥٤ |
| ٦ | ٢٢,٤٥٧ | ١٦,٨١٢ | ١٢,٥٩٢ | ١٠,٦٤٥ | ٥,٣٤٨ | ٢,٢٠٤ | ٠,٨٧٢ |
| ٧ | ٢٤,٣٢٠ | ١٨,٤٧٥ | ١٤,٠٦٧ | ١٢,٠١٧ | ٦,٣٤٦ | ٢,٨٣٣ | ١,٢٣٩ |
| ٨ | ٢٦,١٢٥ | ٢٠,٠٩٠ | ١٥,٥٠٧ | ١٣,٣٦٢ | ٧,٣٤٤ | ٣,٤٩٠ | ١,٦٤٦ |
| ٩ | ٢٧,٨٧٧ | ٢١,٦٦٦ | ١٦,٩١٩ | ١٤,٦٨٤ | ٨,٣٤٣ | ٤,١٦٨ | ٢,٠٨٨ |
| ١٠ | ٢٩,٥٨٨ | ٢٣,٢٠٩ | ١٨,٣٠٧ | ١٥,٩٨٧ | ٩,٣٤٢ | ٤,٨٦٥ | ٢,٥٥٨ |
| ١١ | ٣١,٢٦٤ | ٢٤,٧٢٥ | ١٩,٦٧٥ | ١٧,٢٧٥ | ١٠,٣٤١ | ٥,٥٧٨ | ٣,٠٥٣ |
| ١٢ | ٣٢,٩٠٩ | ٢٦,٢١٧ | ٢١,٠٢٦ | ١٨,٥٤٩ | ١١,٣٤٠ | ٦,٣٠٤ | ٣,٥٧١ |
| ١٣ | ٣٤,٥٢٨ | ٢٧,٦٨٨ | ٢٢,٣٦٢ | ١٩,٨١٢ | ١٢,٣٤٠ | ٧,٠٤٢ | ٤,١٠٧ |
| ١٤ | ٣٦,١٢٣ | ٢٦,١٤١ | ٢٣,٦٨٥ | ٢١,٠٦٤ | ١٣,٣٣٩ | ٧,٧٩٠ | ٤,٦٦٠ |
| ١٥ | ٣٧,٦٩٧ | ٣٠,٥٧٨ | ٢٤,٩٩٦ | ٢٢,٣٠٧ | ١٤,٣٣٩ | ٨,٥٤٧ | ٥,٢٢٩ |
| ١٦ | ٣٩,٢٥٢ | ٣٢,٠٠٠ | ٢٦,٢٩٦ | ٢٣,٥٤٢ | ١٥,٣٣٨ | ٩,٣١٢ | ٥,٨١٢ |
| ١٧ | ٤٠,٧٩٠ | ٣٣,٤٠٩ | ٢٧,٥٨٧ | ٢٤,٧٦٩ | ١٦,٣٣٨ | ١٠,٠٨٥ | ٦,٤٠٨ |
| ١٨ | ٤٢,٣١٢ | ٣٤,٨٠٥ | ٢٨,٨٦٩ | ٢٥,٩٨٩ | ١٧,٣٣٨ | ١٠,٨٦٥ | ٧,٠١٥ |
| ١٩ | ٤٣,٨٢٠ | ٣٦,١٩١ | ٣٠,١٤٤ | ٢٧,٢٠٤ | ١٨,٣٣٨ | ١١,٦٥١ | ٧,٦٣٣ |
| ٢٠ | ٤٥,٣١٥ | ٣٧,٥٦٦ | ٣١,٤١٠ | ٢٨,٤١٢ | ١٩,٣٣٧ | ١٢,٤٤٣ | ٨,٢٦٠ |

تابع جدول رقم (٤)

| ٧ درجات الحرية | المساحة في الطرف العلوي | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ٠,٠٠١ | ٠,٠١ | ٠,٠٥ | ٠,١٠ | ٠,٥٠ | ٠,٩٠٠ | ٠,٩٩ |
| ٢١ | ٤٦,٧٩٧ | ٣٨,٩٣٢ | ٣٢,٦٧١ | ٢٩,٦١٥ | ٢٠,٣٣٧ | ١٢,٢٠٠ | ٨,٨٩٧ |
| ٢٢ | ٤٨,٢٦٨ | ٤٠,٢٨٩ | ٣٣,٩٢٤ | ٣٠,٨١٣ | ٢١,٣٣٢ | ١٤,٠٤١ | ٩,٥٤٢ |
| ٢٣ | ٤٩,٧٢٨ | ٤١,٦٣٨ | ٣٥,١٧٢ | ٣٢,٠٠٧ | ٢٢,٣٣٧ | ١٤,٨٤٨ | ١٠,١٩٦ |
| ٢٤ | ٥١,١٧٩ | ٤٢,٩٨٠ | ٤٢,٤١٥ | ٣٣,١٩٦ | ٢٣,٣٣٧ | ١٥,٦٥٩ | ١٠,٨٥٦ |
| ٢٥ | ٥٢,٦٢٠ | ٤٤,٣١٤ | ٣٧,٦٥٢ | ٣٤,٣٨٢ | ٢٤,٣٣٧ | ١٦,٤٧٣ | ١١,٥٢٤ |

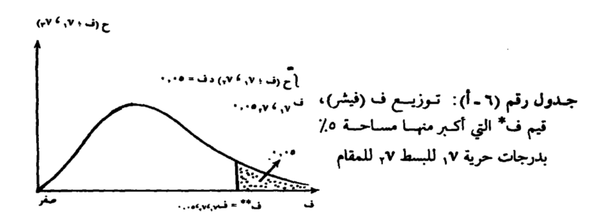


**جدول رقم (٥): توزيع ت (ستيودنت)، قيم ت لمساحات محددة في الطرف العلوي.**

| ٧ درجات الحرية | المساحة في الطرف العلوي (ح (ت > ت*)) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ٠,١٠ | ٠,٠٥ | ٠,٠٢٥ | ٠,٠١ | ٠,٠٠٥ |
| ١ | ٣,٠٧٨ | ٦,٣١٤ | ١٢,٧٠٦ | ٣١,٨٢١ | ٦٣,٦٥٧ |
| ٢ | ١,٨٨٦ | ٢,٩٢٠ | ٤,٢٠٣ | ٦,٩٦٥ | ٩,٩٢٥ |
| ٣ | ١,٦٣٨ | ٢,٣٥٣ | ٣,١٨١ | ٤,٥٤١ | ٥,٨٤١ |
| ٤ | ١,٥٣٣ | ٢,١٣٢ | ٢,٧٧٦ | ٣,٧٤٧ | ٤,٦٠٤ |
| ٥ | ١,٤٧٦ | ٢,٠١٥ | ٢,٥٧١ | ٣,٣٦٥ | ٤,٠٣٢ |
| ٦ | ١,٤٤٠ | ١,٩٤٣ | ٢,٤٤٧ | ٣,١٤٣ | ٣,٧٠٧ |
| ٧ | ١,٤١٥ | ١,٨٩٥ | ٢,٣٦٥ | ٢,٩٩٨ | ٣,٣٩٩ |
| ٨ | ١,٣٩٧ | ١,٨٦٠ | ٢,٣٠٦ | ٢,٨٩٦ | ٣,٣٥٥ |
| ٩ | ١,٣٨٣ | ١,٩٣٣ | ٢,٢٦٢ | ٢,٨٢١ | ٢,٢٥٠ |
| ١٠ | ١,٣٧٢ | ١,٨١٢ | ٢,٢٢٨ | ٢,٧٦٤ | ٣,١٦٩ |
| ١١ | ١,٣٦٣ | ١,٧٩٦ | ٢,٢٠١ | ٢,٧١٨ | ٣,١٠٦ |
| ١٢ | ١,٣٥٦ | ١,٧٨٢ | ٢,١٧٩ | ٢,٦٨١ | ٣,٠٥٥ |
| ١٣ | ١,٣٥٠ | ١,٧٧١ | ٢,١٦٠ | ٢,٦٥٠ | ٣,٠١٢ |
| ١٤ | ١,٣٤٥ | ١,٧٦١ | ٢,١٤٥ | ٢,٦٢٤ | ٢,٩٧٧ |
| ١٥ | ١,٣٤١ | ١,٧٥٣ | ٢,١٣١ | ٢,٦٠٢ | ٢,٩٤٧ |
| ١٦ | ١,٣٣٧ | ١,٧٤٦ | ٢,١١٠ | ٢,٥٨٣ | ٢,٩٢١ |
| ١٧ | ١,٣٣٣ | ١,٧٤٠ | ٢,١١٠ | ٢,٥٦٧ | ٢,٨٩٨ |
| ١٨ | ١,٣٣٠ | ١,٧٣٤ | ٢,١٠٢ | ٢,٥٥٢ | ٢,٨٧٨ |
| ١٩ | ١,٣٢٨ | ١,٧٢٩ | ٢,٠٩٣ | ٢,٥٣٩ | ٢,٨٦١ |
| ٢٠ | ١,٣٢٥ | ١,٧٢٥ | ٢,٠٨٦ | ٢,٥٢٨ | ٢,٨٤٥ |
| ٢١ | ١,٣٢٣ | ١,٧٢١ | ٢,٠٨٠ | ٢,٥١٨ | ٢,٥٣١ |
| ٢٢ | ١,٣٢١ | ١,٧١٧ | ٢,٠٧٤ | ٢,٥٠٨ | ٢,٨١٩ |
| ٢٣ | ١,٣١٩ | ١,٧١٤ | ٢,٠٦٩ | ٢,٥٠٠ | ٢,٨٠٧ |

تابع جدول رقم (٥)

| v<br>درجات<br>الحرية | المساحة في الطرف العلوي (ح (ت > ت*)) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ٠,١٠ | ٠,٠٥ | ٠,٠٢٥ | ٠,٠١ | ٠,٠٠٥ |
| ٢٤ | ١,٣١٨ | ١,٧١١ | ٢,٠٦٤ | ٢,٤٩٢ | ٢,٧٩٧ |
| ٢٥ | ١,٣١٦ | ١,٧١١ | ٢,٠٦٠ | ٢,٤٨٥ | ٢,٧٨٧ |
| ٢٦ | ١,٣١٥ | ١,٧٠٦ | ٢,٠٥٦ | ٢,٤٧٩ | ٢,٧٧٩ |
| ٢٧ | ١,٣١٤ | ١,٧٠٣ | ٢,٠٥٢ | ٢,٤٧٣ | ٢,٧٧١ |
| ٢٨ | ١,٣١٣ | ١,٧٠١ | ٢,٠٤٨ | ٢,٤٦٧ | ٢,٧٦٣ |
| ٢٩ | ١,٣١١ | ١,٦٩٩ | ٢,٠٤٥ | ٢,٤٦٢ | ٢,٧٥٦ |
| ٣٠ | ١,٣١٠ | ١,٦٩٧ | ٢,٠٤٢ | ٢,٤٥٧ | ٢,٧٥٠ |
| ٤٠ | ١,٣٠٣ | ١,٦٨٤ | ٢,٠٢١ | ٢,٤٢٣ | ٢,٧٠٤ |
| ٦٠ | ١,٢٩٦ | ١,٦٧١ | ٢,٠٠٠ | ٢,٣٩٠ | ٢,٦٦٠ |
| ١٢٠ | ١,٢٨٩ | ١,٦٥٨ | ١,٩٨٠ | ٢,٣٥٨ | ٢,٦١٧ |
| ∞ | ١,٢٨٢ | ١,٦٤٥ | ١,٩٦٠ | ٢,٣٢٦ | ٢,٥٧٦ |

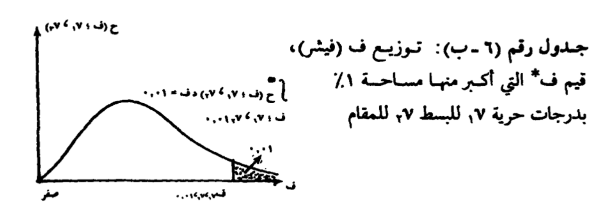



**جدول رقم (٦ ـ أ): توزيع ف (فيشر)، قيم ف* التي أكبر منها مساحة ٥٪ بدرجات حرية $\nu_1$ للبسط $\nu_2$ للمقام**

| $\nu_2$ \ $\nu_1$ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ١٢ | ٢٤ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ١٦١,٤ | ١٩٩,٥ | ٢١٥,٧ | ٢٢٤,٦ | ٢٣٠,٢ | ٢٣٤,٠ | ٢٤٣,٩ | ٢٤٩,٠ | ٢٩٤,٣ |
| ٢ | ١٨,٥ | ١٩,٠ | ١٩,٢ | ١٩,٢ | ١٩,٣ | ١٩,٣ | ١٩,٤ | ١٩,٤ | ١٩,٥ |
| ٣ | ١٠,١ | ٩,٦ | ٩,٣ | ٩,١ | ٩,٠ | ٨,٩ | ٨,٧ | ٨,٦ | ٨,٥ |
| ٤ | ٧,٧ | ٦,٩ | ٦,٦ | ٦,٤ | ٦,٣ | ٦,٢ | ٥,٩ | ٥,٨ | ٥,٦ |
| ٥ | ٦,٦ | ٥,٨ | ٥,٤ | ٥,٢ | ٥,١ | ٥,٠ | ٤,٧ | ٤,٥ | ٤,٤ |
| ٦ | ٦,٠ | ٥,١ | ٤,٨ | ٤,٥ | ٤,٤ | ٤,٣ | ٤,٠ | ٣,٨ | ٣,٧ |
| ٧ | ٥,٦ | ٤,٧ | ٤,٤ | ٤,١ | ٤,٠ | ٣,٩ | ٣,٦ | ٣,٤ | ٣,٢ |
| ٨ | ٥,٣ | ٤,٥ | ٤,١ | ٣,٨ | ٣,٧ | ٣,٦ | ٣,٣ | ٣,١ | ٢,٩ |
| ٩ | ٥,١ | ٤,٣ | ٣,٩ | ٣,٦ | ٣,٥ | ٣,٤ | ٣,١ | ٢,٩ | ٢,٧ |
| ١٠ | ٥,٠ | ٤,١ | ٣,٧ | ٣,٥ | ٣,٣ | ٣,٢ | ٢,٩ | ٢,٧ | ٢,٥ |
| ١١ | ٤,٨ | ٤,٠ | ٣,٦ | ٣,٤ | ٣,٢ | ٣,١ | ٢,٨ | ٢,٦ | ٢,٤ |
| ١٢ | ٤,٨ | ٣,٩ | ٣,٥ | ٣,٣ | ٣,١ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٥ | ٢,٣ |
| ١٣ | ٤,٧ | ٣,٨ | ٣,٤ | ٣,٢ | ٣,٠ | ٢,٩ | ٢,٦ | ٢,٤ | ٢,٢ |
| ١٤ | ٤,٦ | ٣,٧ | ٣,٣ | ٣,١ | ٣,٠ | ٢,٨ | ٢,٥ | ٢,٤ | ٢,١ |
| ١٥ | ٤,٥ | ٣,٦ | ٣,٣ | ٣,١ | ٢,٩ | ٢,٨ | ٢,٥ | ٢,٣ | ٢,١ |
| ١٦ | ٤,٥ | ٣,٦ | ٣,٢ | ٣,٠ | ٢,٨ | ٢,٧ | ٢,٤ | ٢,٢ | ٢,٠ |
| ١٧ | ٤,٥ | ٣,٦ | ٣,٢ | ٣,٠ | ٢,٨ | ٢,٧ | ٢,٤ | ٢,٢ | ٢,٠ |
| ١٨ | ٤,٤ | ٣,٥ | ٣,٢ | ٢,٩ | ٢,٨ | ٢,٧ | ٢,٣ | ٢,٢ | ١,٩ |
| ١٩ | ٤,٤ | ٣,٥ | ٣,١ | ٢,٩ | ٢,٧ | ٢,٦ | ٢,٣ | ٢,١ | ١,٩ |
| ٢٠ | ٤,٤ | ٣,٤ | ٣,١ | ٢,٩ | ٢,٧ | ٢,٦ | ٢,٣ | ٢,١ | ١,٨ |
| ٢٢ | ٤,٣ | ٣,٤ | ٣,١ | ٢,٨ | ٢,٧ | ٢,٦ | ٢,٢ | ٢,٠ | ١,٨ |
| ٢٤ | ٤,٣ | ٣,٤ | ٣,٠ | ٢,٨ | ٢,٦ | ٢,٥ | ٢,٢ | ٢,٠ | ١,٧ |
| ٢٦ | ٤,٢ | ٣,٣ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٦ | ٢,٥ | ٢,٢ | ٢,٠ | ١,٧ |

تابع جدول رقم (٦ - م)

| ١٧ / ٢٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ١٢ | ٢٤ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢٨ | ٤,٢ | ٣,٣ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٦ | ٢,٤ | ٢,١ | ١,٩ | ١,٦ |
| ٣٠ | ٤,٢ | ٣,٢ | ٢,٩ | ٢,٧ | ٢,٥ | ٢,٤ | ٢,١ | ١,٩ | ١,٦ |
| ٤٠ | ٤,١ | ٣,٢ | ٢,٨ | ٢,٦ | ٢,٤ | ٢,٣ | ٢,٠ | ١,٨ | ١,٥ |
| ٦٠ | ٤,٠ | ٣,١ | ٢,٨ | ٢,٥ | ٢,٤ | ٢,٣ | ١,٩ | ١,٧ | ١,٤ |
| ١٢٠ | ٣,٩ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٤ | ٢,٣ | ٢,٢ | ١,٨ | ١,٦ | ١,٢ |
| ∞ | ٣,٨ | | ٢,٦ | ٢,٤ | ٢,٢ | ٢,١ | ١,٨ | ١,٥ | ١,٠ |




**جدول رقم (٦ ـ ب): توزيع ف (فيشر)،**
**قيم ف* التي أكبر منها مساحة ١٪**
**بدرجات حرية ν١ للبسط ν٢ للمقام**

| ν٢ \ ν١ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٨ | ١٢ | ٢٤ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٤٠٥٢ | ٤٩٩٩ | ٥٤٠٣ | ٥٦٢٥ | ٥٧٦٤ | ٥٨٥٩ | ٥٩٨١ | ٦١٠٦ | ٦٢٣٤ | ٦,٣٦٦ |
| ٢ | ٩٨,٥ | ٩٩,٠ | ٩٩,٢ | ٩٩,٢ | ٩٩,٣ | ٩٩,٣ | ٩٩,٤ | ٩٩,٤ | ٩٩,٥ | ٩٩,٦ |
| ٣ | ٣٤,١ | ٣٠,٨ | ٢٩,٥ | ٢٨,٧ | ٢٨,٢ | ٢٧,٩ | ٢٧,٥ | ٢٧,٢ | ٢٦,٦ | ٢٦,١ |
| ٤ | ٢١,٢ | ١٨,٠ | ١٦,٧ | ١٦,٠ | ١٥,٥ | ١٥,٢ | ١٤,٨ | ١٤,٤ | ١٣,٩ | ١٣,٥ |
| ٥ | ١٦,٣ | ١٣,٣ | ١٢,١ | ١١,٤ | ١١,٠ | ١٠,٧ | ١٠,٣ | ٩,٩ | ٩,٥ | ٩,٠ |
| ٦ | ١٣,٧ | ١٠,٩ | ٩,٨ | ٩,٢ | ٨,٨ | ٨,٥ | ٨,١ | ٧,٧ | ٧,٣ | ٦,٩ |
| ٧ | ١٢,٢ | ٩,٦ | ٨,٤ | ٧,٩ | ٧,٥ | ٧,٢ | ٦,٨ | ٦,٥ | ٦,١ | ٥,٦ |
| ٨ | ١١,٣ | ٨,٦ | ٧,٦ | ٧,٠ | ٦,٦ | ٦,٤ | ٦,٠ | ٥,٧ | ٥,٣ | ٤,٩ |
| ٩ | ١٠,٦ | ٨,٠ | ٧,٠ | ٦,٤ | ٦,١ | ٥,٨ | ٥,٥ | ٥,١ | ٤,٧ | ٤,٣ |
| ١٠ | ١٠,٠ | ٧,٦ | ٦,٦ | ٦,٠ | ٥,٦ | ٥,٤ | ٥,١ | ٤,٧ | ٤,٣ | ٣,٩ |
| ١١ | ٩,٦ | ٧,٢ | ٦,٢ | ٥,٧ | ٥,٣ | ٥,١ | ٤,٧ | ٤,٤ | ٤,٠ | ٣,٦ |
| ١٢ | ٩,٣ | ٦,٩ | ٦,٠ | ٥,٤ | ٥,١ | ٤,٨ | ٤,٥ | ٤,٢ | ٣,٨ | ٣,٤ |
| ١٣ | ٩,١ | ٦,٧ | ٥,٧ | ٥,٢ | ٤,٩ | ٤,٦ | ٤,٣ | ٤,٠ | ٣,٦ | ٣,٢ |
| ١٤ | ٨,٩ | ٦,٥ | ٥,٦ | ٥,٠ | ٤,٧ | ٤,٥ | ٤,١ | ٣,٨ | ٣,٤ | ٣,٠ |
| ١٥ | ٨,٧ | ٦,٤ | ٥,٤ | ٤,٩ | ٤,٦ | ٤,٣ | ٤,٠ | ٣,٧ | ٣,٣ | ٢,٩ |
| ١٦ | ٨,٥ | ٦,٢ | ٥,٣ | ٤,٨ | ٤,٤ | ٤,٢ | ٣,٩ | ٣,٦ | ٣,٢ | ٢,٨ |
| ١٧ | ٨,٤ | ٦,١ | ٥,٢ | ٤,٧ | ٤,٣ | ٤,١ | ٣,٨ | ٣,٤ | ٣,١ | ٢,٦ |
| ١٨ | ٨,٣ | ٦,٠ | ٥,١ | ٤,٦ | ٤,٣ | ٤,٠ | ٣,٧ | ٣,٤ | ٣,٠ | ٢,٦ |
| ١٩ | ٨,٢ | ٥,٩ | ٥,٠ | ٤,٥ | ٤,٢ | ٣,٩ | ٣,٦ | ٣,٣ | ٢,٩ | ٢,٤ |
| ٢٠ | ٨,١ | ٥,٨ | ٤,٩ | ٤,٤ | ٤,١ | ٣,٩ | ٣,٦ | ٣,٢ | ٢,٩ | ٢,٤ |
| ٢٢ | ٧,٩ | ٥,٧ | ٤,٨ | ٤,٣ | ٤,٠ | ٣,٨ | ٢,٤ | ٣,١ | ٢,٨ | ٢,٣ |
| ٢٤ | ٧,٨ | ٥,٦ | ٤,٧ | ٤,٢ | ٣,٩ | ٣,٧ | ٢,٤ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٢ |

تابع جدول رقم (٦ - ب)

| ١٧ / ٢٧ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٨ | ١٢ | ٢٤ | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢٦ | ٧,٧ | ٥,٥ | ٤,٦ | ٤,١ | ٣,٨ | ٣,٦ | ٣,٣ | ٣,٠ | ٢,٦ | ٢,١ |
| ٢٨ | ٧,٦ | ٥,٤ | ٤,٦ | ٤,١ | ٣,٨ | ٣,٥ | ٣,٢ | ٢,٩ | ٢,٥ | ٢,١ |
| ٣٠ | ٧,٦ | ٥,٢ | ٤,٥ | ٤,٠ | ٣,٧ | ٣,٥ | ٣,٢ | ٢,٨ | ٣,٣ | ٢,١ |
| ٤٠ | ٧,٣ | ٥,٠ | ٤,٣ | ٣,٨ | ٣,٥ | ٣,٣ | ٣,٠ | ٣,٧ | ٢,٢ | ١,٨ |
| ٦٠ | ٧,١ | ٤,٨ | ٤,١ | ٣,٦ | ٣,٣ | ٣,١ | ٢,٨ | ٢,٥ | ٢,٠ | ١,٦ |
| ١٠٠ | ٦,٨ | ٤,٦ | ٤,٠ | ٣,٥ | ٣,٢ | ٣,٠ | ٢,٧ | ٢,٣ | ١,٨ | ١,٤ |
| ∞ | ٦,٦ | | ٣,٨ | ٣,٣ | ٣,٠ | ٢,٨ | ٢,٥ | ٢,٢ | | ١,٠ |

## جدول رقم (٧)
## معاملات سبيرمان لارتباط الرتب

| عدد أزواج القيم | قيم $\alpha$ (من اتجاه واحد) | |
|---|---|---|
| ن | ٠,٠٥ | ٠,٠١ |
| ٤ | ١,٠٠٠ | - |
| ٥ | ١,٩٠٠ | ١,٠٠٠ |
| ٦ | ٠,٨٢٩ | ٠,٩٤٣ |
| ٧ | ٠,٧١٤ | ٠,٨٩٣ |
| ٨ | ٠,٦٤٣ | ٠,٨٣٣ |
| ٩ | ٠,٦٠٠ | ٠,٧٨٣ |
| ١٠ | ٠,٥٦٤ | ٠,٧٤٦ |
| ١٢ | ٠,٥٠٤ | ٠,٧٠١ |
| ١٤ | ٠,٤٥٦ | ٠,٦٤٥ |
| ١٦ | ٠,٤٢٥ | ٠,٦٠١ |
| ١٨ | ٠,٣٩٩ | ٠,٥٦٤ |
| ٢٠ | ٠,٣٧٧ | ٠,٥٣٤ |
| ٢٢ | ٠,٣٥٩ | ٠,٥٠٨ |
| ٢٤ | ٠,٣٤٣ | ٠,٤٨٥ |
| ٢٦ | ٠,٣٢٩ | ٠,٤٦٥ |
| ٢٨ | ٠,٣١٧ | ٠,٤٤٨ |
| ٣٠ | ٠,٣٠٦ | ٠,٤٣٢ |

# المحتــويــات

الباب الاول : بعض الادوات الرياضية ........................ ٧-٤٠
الفصل الاول : نظرية الفئات ........................ ٩-١٥
(١-١-١) تعريف ........................ ٩
(٢-١-١) تعريف ........................ ١٠
(٣-١-١) تعريف ........................ ١٠
(٤-١-١) تعريف ........................ ١٠
(٥-١-١) تعريف ........................ ١١
(٦-١-١) تعريف الفئة الشاملة ........................ ١١
(٧-١-١) تعريف الفئة المكملة ........................ ١٢
(٨-١-١) عمليات الفئات ........................ ١٢
(٩-١-١) الفئات المحدودة وغير المحدودة ........................ ١٤
(١٠-١-١) الفئات المعدودة وغير المعدودة ........................ ١٤
(١١-١-١) الفئات المتصلة والمتقطعة ........................ ١٥
(١٢-١-١) بعض العلاقات الجبرية بين الفئات ........................ ١٥

الفصل الثاني: التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين ........................ ١٧-٢٤
(١-٢-١) التباديل ........................ ١٧
(٢-٢-١) التوافيق ........................ ١٨
(٣-٢-١) نظرية ذات الحدين ........................ ٢٢

الفصل الثالث : المصفوفات ........................ ٢٥-٤٠
(١-٣-١) تعريف ........................ ٢٥
(٢-٣-١) تعريف ........................ ٢٥
(٣-٣-١) تعريف ........................ ٢٥
(٤-٣-١) تعريف المصفوفة الصفرية ........................ ٢٥
(٥-٣-١) جمع المصفوفات ........................ ٢٥
(٦-٣-١) ضرب المصفوفات في ثابت ........................ ٢٧

(١-٣-٧) ضرب المصفوفات .......................... ١٠
(١-٣-٨) بعض انواع المصفوفات .......................... ٢٩
(١-٣-٩) المحددات .......................... ٣١
(١-٣-١٠) المحيدد (او المحدد الصغير) ومرافق العنصر .......................... ٣٣
(١-٣-١١) رتبة المصفوفة .......................... ٣٤
(١-٣-١٢) المصفوفة المعزولة وغير المعزولة .......................... ٣٥
(١-٣-١٣) المصفوفة المجاورة لمصفوفة مربعة .......................... ٣٥
(١-٣-١٤) مقلوب المصفوفة .......................... ٣٦
اسئلة وتمارين(١) .......................... ٣٨

الباب الثاني : نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها .......................... ٤١-٨٠
الفصل الاول : بعض التعاريف والنظريات الاساسية .......................... ٤٣-٥٥
(٢-١-١) تعاريف .......................... ٤٣
(٢-١-٢) تعريف الاحتمال .......................... ٤٤
(٢-١-٣) قوانين جمع وضرب الاحتمالات .......................... ٤٥
تمارين محلولة مجموعة (٢-١) .......................... ٤٩
الفصل الثاني : نظرية بيز .......................... ٥٧-٦٠
الفصل الثالث : شجرة القرارات .......................... ٦١-٦٦
الفصل الرابع : اتخاذ القرارات في ظروف المخاطرة .......................... ٦٧-٧٢
اسئلة وتمارين (٢) .......................... ٧٣

الباب الثالث : المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية .......................... ٨١-١١١
الفصل الاول : دالة كثافة الاحتمال ودالة الاحتمال التجميعي .......................... ٨٢-٩٤
(٣-١-١) دالة الاحتمال للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها .......................... ٨٢
(٣-١-٢) دالة الاحتمال التجميعي للمتغير العشوائي المتقطع وخواصها .......................... ٨٤
(٣-١-٣) دالة كثافة الاحتمال للمتغير المتصل وخواصها .......................... ٨٦
(٣-١-٤) دالة الاحتمال التجميعي للمتغير المتصل وخواصها .......................... ٨٧
(٣-١-٥) دالة كثافة الاحتمال المشتركة والهامشية والشرطية .......................... ٨٩
الفصل الثاني : العزوم .......................... ٩٥-٩٨
(٣-٢-١) العزوم حول الصفر .......................... ٩٥
(٣-٢-٢) العزوم حول الوسط الحسابي .......................... ٩٦

(٣-٢-٣) العلاقة بين العزوم حول الصفر والعزوم حول الوسط الحسابي .... ٩٧
(٤-٢-٣) معاملي الالتواء والتفرطح .... ٩٨
الفصل الثالث : بعض ادلة وصف التوزيعات التكرارية .... ٩٩-١٠٣
(١-٣-٣) دليل التوقع .... ٩٩
(٢-٣-٣) دليل التباين .... ١٠٢
(٣-٣-٣) دليل التغاير .... ١٠٣
الفصل الرابع : الدالة المولدة للعزوم .... ١٠٥-١١٤
أسئلة وتمارين (٣) .... ١٠٩
الباب الرابع : التوزيعات الاحصائية .... ١١٥ - ١٦٤
الفصل الاول : التجارب المتكررة المستقلة وغيرالمستقلة .... ١١٦-١٣٧
(١-١-٤) ايجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة المستقلة ـ قانون ذي الحدين أو توزيع ذي الحدين .... ١١٦
تمارين محلولة على توزيع ذي الحدين .... ١٢٥
(٢-١-٤) تعميم قانون ذي الحدين الى توزيع متعدد الحدود .... ١٢٨
(٣-١-٤) توزيع بواسون .... ١٢٩
(٤-١-٤) ايجاد القانون العام في حالة التجارب المتكررة غير المستقلة ـ توزيع الهايبرجيومترك .... ١٣٤
الفصل الثاني : التوزيعات المتصلة .... ١٣٩-١٦٤
(١-٢-٤) التوزيع المنتظم او المستطيل .... ١٣٩
(٢-٢-٤) دالة جاما وتوزيع جاما .... ١٤٣
(٣-٢-٤) دالة بيتا وتوزيع بيتا .... ١٤٧
(٤-٢-٤) التوزيع الأُسيّ .... ١٥٠
اسئلة وتمارين (٤) .... ١٥٥
الباب الخامس : توزيعات العينات الكبيرة والصغيرة .... ١٦٥-٢٠٦
الفصل الاول : قانون الاعداد الكبيرة ونظرية النزعة المركزية .... ١٦٧-١٩١
(١-١-٥) قانون الاعداد الكبيرة .... ١٦٧
(٢-١-٥) نظرية النوعة المركزية .... ١٧٧
الفصل الثاني : التوزيع الطبيعي .... ١٨١-١٩١
(١-٢-٥) تعريف .... ١٨١

(٥-٢-٢) عزوم التوزيع الطبيعي ........ ١٨٣
(٥-٢-٣) الدالة المولدة للعزوم ........ ١٨٥
(٥-٢-٤) التوزيع الطبيعي القياسي ........ ١٨٧
(٥-٢-٥) نظرية ........ ١٨٨
(٥-٢-٦) التوزيع الطبيعي ذي المتغيرين ........ ١٨٩

الفصل الثالث : توزيعات العينات الصغيرة ........ ١٩٣-٢٠٦

(٥-٣-١) توزيع كاي تربيع ........ ١٩٣
(٥-٣-٢) توزيع ت ........ ١٩٦
(٥-٢-٣) توزيع ف ........ ١٩٦
اسئلة وتمارين (٥) ........ ٢٠٢
الباب السادس : التقدير ........ ٢٠٧-٣٠٣
الفصل الاول : التقدير بنقطة ........ ٢٠٩-٢٦٠
(٦-١-١) خواص المقدر الجيد ........ ٢٠٩
(٦-١-١-١) عدم التحيز ........ ٢١٠
(٦-١-١-٢) الاتساق ........ ٢١٤
(٦-١-١-٣) الكفاءة النسبية ........ ٢١٧
(٦-١-١-٤) الكفاية ........ ٢١٩

(٦-١-٢) طرق التقدير بنقطة ........ ٢٢٢
(٦-١-٢-١) طريقة العزوم ........ ٢٢٢
(٦-١-٢-٢) طريقة الامكان الاكبر ........ ٢٢٤
(٦-١-٢-٣) طريقة المربعات الصغرى واستخدامها في تقدير معالم النماذج الاحصائية ........ ٢٢٩

الفصل الثاني : التقدير بفترة ثقة ........ ٢٦٣-٣٠٥
٦-٢-١) فترة ثقة لمتوسط مجتمع معتاد ........ ٢٦٣
(٦-٢-٢) فترة ثقة للنسبة ........ ٢٦٧
(٦-٢-٣) فترة ثقة للفروق والمجاميع ........ ٢٦٨
(٦-٢-٤) فترة ثقة للتباين ........ ٢٧٦
(٦-٢-٥) فترة ثقة للانحراف المعياري لمجتمع معتاد ........ ٢٧٩
(٦-٢-٦) فترة ثقة لمعامل الارتباط ........ ٢٨١

(٧-٢-٦) فترة ثقة لمعالم النموذج الخطي البسيط والقيمة الاتجاهية للمتغير التابع عند مستوى معين للمتغير المستقل ........ ٢٨٤
(٨-٢-٦) فترات ثقة لمعالم النموذج الخطي العام والقيمة الاتجاهية للمتغير التابع عند مستويات معينة للمتغيرات المستقلة ........ ٢٨٧
اسئلة وتمارين (٦) ........ ٢٩٢
الباب السابع : اختبار الفروض ........ ٣٠٧-٤٠٢
الفصل الاول : الاختبارات المعلمية ........ ٣٠٨-٣٥٩
(٧-١-١) مقدمة ........ ٣٠٨
(٧-١-٢) الفرض العدمي والفرض البديل ........ ٣٠٨
(٧-١-٣) الخطأ من النوع الاول والخطأ من النوع الثاني ........ ٣٠٩
(٧-١-٤) كيفية اجراء الاختبار باستخدام الدالة الاختبارية ........ ٣١٠
(٧-١-٥) قوة الاختبار ........ ٣١٤
(٧-١-٦) اختبار الفرضيات الاحصائية باستخدام فترة الثقة ........ ٣٢٠
(٧-١-٧) اختبارات متوسط المجتمع ........ ٣٢١
(٧-١-٨) اختبارات نسبة المجتمع ........ ٣٢٧
(٧-١-٩) اختبارات الفروق ........ ٣٣٠
(٧-١-١٠) اختبار تباين مجتمع معتاد ........ ٣٤٠
(٧-١-١١) اختبار الانحراف المعياري ........ ٣٤٢
(٧-١-١٢) اختبار معامل الارتباط ........ ٣٤٣
(٧-١-١٣) اختبارات معالم النموذج الخطي البسيط ........ ٣٤٦
(٧-١-١٤) اختبارات معالم النموذج الخطي العام ........ ٣٤٩
(٧-١-١٥) اختبارات جودة المطابقة والاستقلال ........ ٣٥١
الفصل الثاني : الاختبارات غير البارامترية ........ ٣٦٠-٤٠٢
(٧-٢-١) مقدمة ........ ٣٦٠
(٧-٢-٢) اختبار معامل ارتباط الرتب ........ ٣٦٠
(٧-٢-٣) اختبار الاشارة ........ ٣٦٩
(٧-٢-٤) اختبار U لمان ـ وتني ........ ٣٧٦
(٧-٢-٥) اختبار H لكروسكال ـ والاس ........ ٣٧٩
اسئلة وتمارين (٧) ........ ٣٨٢

الباب الثامن ........ ٤٠٣-٤٥٢
الفصل الاول : تحليل التباين ........ ٤٠٣-٤٢٠
(٨-١-١) مقدمة ........ ٤٠٣
(٨-١-٢) تحليل التباين في اتجاه واحد ........ ٤٠٤
(٨-١-٣) تحليل التباين في اتجاهين ........ ٤٠٨
(٨-١-٤) تحليل التباين في ثلاثة اتجاهات ........ ٤١٥
الفصل الثاني : تحليل التباين في الانحدار ........ ٤٢١-٤٣٧
(٨-٢-١) مقدمة ........ ٤٢١
(٨-٢-٢) تحليل التباين في النموذج الخطي البسيط ........ ٤٢١
(٨-٢-٣) تحليل التباين في النموذج الخطي العام ........ ٤٣٠
اسئلة وتمارين (٨) ........ ٤٣١
جدول رقم (١) توزيع ذي الحدين ........ ٤٣٨
جدول رقم (٢) توزيع بواسون الاحتمالي المتجمع الصاعد ........ ٤٤٠
جدول رقم (٣) التوزيع المعتاد القياسي ........ ٤٤٢
جدول رقم (٤) توزيع $\chi^2$ (كاي تربيع) ........ ٤٤٤
جدول رقم (٥) توزيع ت(ستيودنت) ........ ٤٤٦
جدول رقم (٦- أ) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف* التي اكبر منها
مساحة ٥٪ بدرجات حرية $\nu_1$ للبسط ، $\nu_2$ للمقام ........ ٤٤٨
جدول رقم (٦- ب) توزيع ف (فيشر) ، قيم ف* التي اكبر منها
مساحة ١٪ بدرجات حرية $\nu_1$ للبسط $\nu_2$ للمقام ........ ٤٥٠
جدول رقم (٧) معامل سبيرمان لارتباط الرتب ........ ٤٥٢

# المراجع

## اولا : المراجع العربيـة

١ ـ احمد عباده سرحان ، مقدمة في طرق التحليل الاحصائي ، معهد البحوث والدراسات الاحصائية القاهرة ١٩٧٤ .

٢ ـ احمد عباده سرحان وثابت محمود احمد ، مقدمة العينات ، دار الكتب الجامعية ـ القاهرة ١٩٧١

٣ ـ احمد عباده سرحان وثابت محمود ابراهيم ، تصميم وتحليل التجارب ، دار الكتب الجامعية ـ القاهرة ١٩٦٩

٤ ـ مدني دسوقي مصطفى ، مبادىء في نظرية الاحتمالات والاحصاء الرياضي وتطبيقاتها في الاستنتاج الاحصائي ، دار النهضة العربية ـ القاهرة ١٩٦٨ .

٥ ـ محرم وهبي محمود ، النظرية الاحصائية وتطبيقاتها ، الجزء الثاني ، المعهد القومي للتخطيط ـ القاهرة ١٩٦٩

٦ ـ محمد عادل سودان ، الرياضيات العامة ج١ ، ج٢ ، ج٣ ، دار العلوم للطباعة والنشر ـ موسكو ١٩٧٢

٧ ـ فينتشين جنيدنكو ـ المبادىء الأولية لنظرية الاحتمالات ، دار مير للطباعة والنشر ـ موسكو ١٩٦٩

## ثانيا : المراجع الاجنبية


1- Alexander M.Mood and Franklin A. Graybill; Introduction to the Theoryof Statistics, McGraw- Hill Book company, Inc, Second Edition 1963.

2- B.V. Gnedenko; The Theory of Probability, Mir Pulishers, Moscow 1969.

3- E. Bowen, M. Starr; Basic Statistics for Business andEconomics McGraw-Hill Book Company, 1982.

4- Fadil H. Zuwaylif; Applied Business Statistics, AddisonWesley Publishing Company, Inc. 1974.

5- Frederick E. Croxton, Dudley J. Cowden and Sidney Klein; Applied General Statistics, Prentice- Hall of India Private Limited, New Delhi, Third Edition 1971.

6- G. Barrie Wetherill; Elememtary Statistical Methods, Chapman and Hall, London, Third Edition 1982.

7- H.C. Sexena; Mathematical Statistics, S.Chand Co. (Pvt) Ltd, Ram Nagar, New Delhi- 55, Seventh Edition 1972.

8- H.T. Hayslett, advisory editor Patrick Murphy; Statistics Made Simple, Made Simple Book, London 1978.

9- J. Hanke, A. Reitsch, J. Dickson; Statistics Decision Models for Management, Allyn and Bacon, Inc. 1984.

10- J. Neter; W. Wasserman; Applied Linear Statistical Models, Richard D. Irwin, Inc. 1974.

11- Robert V. Hogg and Allen T. Craig; Introduction to Mathematical Statistics. Collier Macmilan International Editions, London, Fourth Edition 1978.

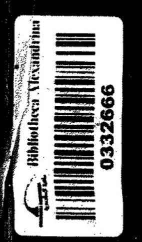
12- Taro Yamane; Mathematics for Economists, An Elementary Survey, Prentice- Hall of India Private Limited, New Delhi, Second Edition 1968.

13- W. Daniel; Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences, John Wiley & Sons; Inc, New York 1983.

14- William Feller; An Introduction to the ProbabilityTheoryand its Applications, Wiley International Edition, Vol. I, Vol. II, Third Edition 1968.

15- William Hays; Statistics for the Sosial Sciences, Holtsaunder International Editions, Second Edition 1980.

16- William Mendenhall, Richard L. Scheaffer and Dennis D. Wackerly; Mathematical Statistics With Applications, Duxbury Press, Boston, Massachusettes, Second Edition 1981






دار المناهج للنشر والتوزيع

أول طلوع جبل الحسين - سرفيس خط ٩
هاتف ٦١٦٦٠٧ - فاكس ٦١٦٦٠٧
ص.ب ٢١٥٣٠٨ عمان ١١١٢٢ الأردن